

Б. І. Мокін, д. т. н., проф.; О. Б. Мокін, к. т. н., доц.

МЕТОД ІДЕНТИФІКАЦІЇ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ З ЕКСТРЕМАЛЬНИМИ СТАТИЧНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Запропоновано метод ідентифікації нелінійних динамічних об'єктів з екстремальними характеристиками, для реалізації алгоритму якого на об'єкт потрібно подавати спочатку ступінчастий, а потім синусоїдальний вхідний вплив і реєструвати реакції об'єкта на ці впливи. Розрахункові співвідношення запропонованого методу отримані згідно з ідеологією Фур'є-інтегрального методу ідентифікації і передбачають розкладення вхідного впливу й реакції об'єкта на нього у відрізки рядів Фур'є.

Ключові слова: ФІМІ, Фур'є-інтегральний метод, ідентифікація, нелінійні динамічні об'єкти, екстремальна статична характеристика.

Вихідні умови та постановка завдання

Досить широкому класу динамічних об'єктів у хімічній технології та теплоенергетиці з вхідним впливом $x(t)$ та реакцією на нього $y(t)$, динаміка яких характеризується імпульсною перехідною характеристикою $g(t)$, притаманна статична характеристика $y = f(x)$, яка має екстремальний характер (рис. 1).

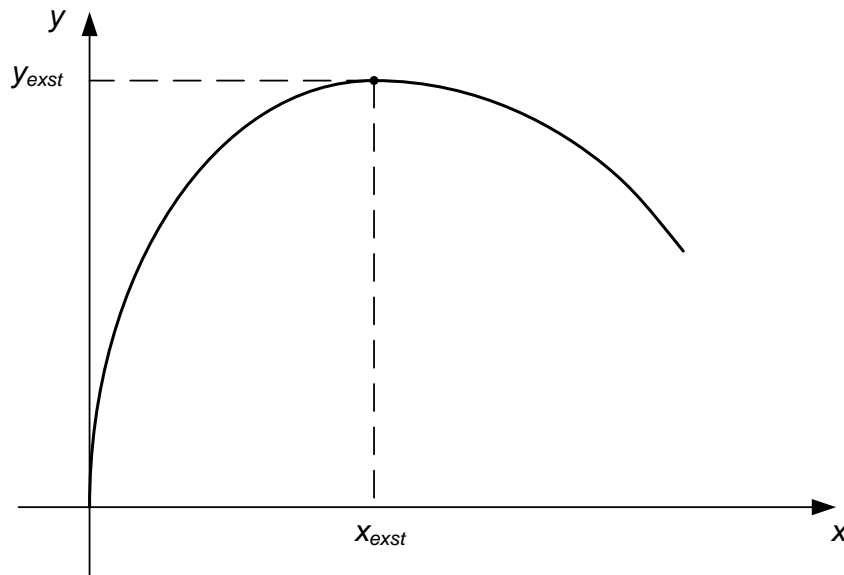


Рис. 1. Екстремальна статична характеристика динамічного об'єкта

Тож, щоб повністю ідентифікувати такий об'єкт, необхідно визначити обидві ці характеристики і $g(t)$, і $y = f(x)$.

Саме таке завдання ставиться в цій роботі.

Для розв'язання цього завдання висунемо дві вихідні передумови, згідно з першою з яких пропонується ідентифікувати статичну характеристику $y = f(x)$ об'єкта степеневим поліномом третього порядку, тобто

$$y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3. \quad (1)$$

Звичайно, для апроксимації екстремальної статичної характеристики, наведеної на рисунку 1, можна використати і степеневий поліном другого порядку, оскільки в нього точка

екстремуму матиме такі ж координати (x_{exst}, y_{exst}) , але ми використаємо степеневий поліном третього порядку, тому що він точніше передає характер наростання координати y при початкових значеннях координати x .

А в якості другої вхідної передумови використаємо відомий підхід [1 – 3], якщо ґрунтується на тому, що структура динамічного об'єкта розглядається у вигляді послідовного з'єднання його інерційної лінійної частини з імпульсною перехідною характеристикою $g(t)$ і проміжним вихідним сигналом $x^*(t)$ та нелінійної безінерційної ланки з характеристикою $y = f(x^*)$ (рис. 2).

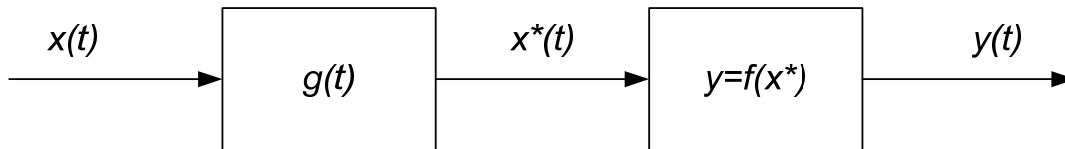


Рис. 2. Структура динамічного об'єкта з виділенням інерційної лінійної частини та безінерційної нелінійної частини

Очевидно, що після введення другої вихідної умови в рівняння (1) потрібно замість x розглядати x^* .

Ідентифікація нелінійної статичної характеристики.

Як відомо [1 – 3], вихідний сигнал $x^*(t)$ лінійної частини динамічного об'єкта можна знайти за допомогою інтегралу згортки

$$x^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)g(\tau)d\tau, \quad (2)$$

який за умови фізичної реалізуємості об'єкта

$$g(t) = \begin{cases} g(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (3)$$

набуває вигляду

$$x^*(t) = \int_0^{\infty} x(t-\tau)g(\tau)d\tau. \quad (4)$$

Згідно з теорією Фур'є-інтегрального методу ідентифікації динамічних об'єктів [3] розкладемо вхідний сигнал $x(t)$ у відрізок ряду Фур'є на вибраному проміжку часу T . Згідно з [3, 4] матимемо

$$x(t) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{jk\omega_1 t}, \quad (5)$$

де $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, а

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega_1 t) dt - j \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega_1 t) dt, \quad k = -n, -(n-1), \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Одразу ж зазначимо, що під час формування якогось сигналу фізичної системи з обмеженим запасом енергії він завжди може бути апроксимований із заданою точністю відрізком ряду Фур'є.

Підставляючи значення $x(t)$ з виразу (5) у вираз (4), отримаємо

$$x^*(t) = \int_0^{\infty} \sum_{k=-n}^n a_k e^{jk\omega_1(t-\tau)} g(\tau) d\tau, \quad (7)$$

або

$$x^*(t) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{jk\omega_1 t} \int_0^{\infty} g(\tau) e^{-jk\omega_1 \tau} d\tau. \quad (8)$$

Якщо згадати, що передаточна функція лінійної частини динамічного об'єкта – це

$$W(p) = \int_0^{\infty} g(\tau) e^{-p\tau} d\tau, \quad (9)$$

а її амплітудно-фазова частотна характеристика (АФЧХ) – це

$$W(j\omega) = W(p) \Big|_{p=j\omega}, \quad (10)$$

то рівняння (8) нескладно привести до вигляду

$$x^*(t) = \sum_{k=-n}^n a_k W(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t}. \quad (11)$$

Підставляючи значення $x^*(t)$ з виразу (11) у вираз (1) матимемо

$$y(t) = c_1 \sum_{k=-n}^n a_k W(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t} + c_2 \left(\sum_{k=-n}^n a_k W(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t} \right)^2 + c_3 \left(\sum_{k=-n}^n a_k W(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t} \right)^3. \quad (12)$$

У тому разі, коли вхідний сигнал $x(t)$ є синусоїдою із частотою ω_1 , тобто

$$x(t) = A \sin \omega_1 t = A \left(\frac{e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t}}{2j} \right) = \frac{A}{2j} e^{j\omega_1 t} + \frac{A}{-2j} e^{-j\omega_1 t}, \quad (13)$$

рівняння (12) перетвориться на рівняння

$$y(t) = c_1 (a_{-1} W(-j\omega_1) e^{-j\omega_1 t} + a_1 W(j\omega_1) e^{j\omega_1 t}) + c_2 (a_{-1} W(-j\omega_1) e^{-j\omega_1 t} + a_1 W(j\omega_1) e^{j\omega_1 t})^2 + c_3 (a_{-1} W(-j\omega_1) e^{-j\omega_1 t} + a_1 W(j\omega_1) e^{j\omega_1 t})^3, \quad (14)$$

у якому

$$a_1 = \frac{A}{2j}, \quad a_{-1} = -\frac{A}{2j}. \quad (15)$$

Підносячи до степеня в рівнянні (14) і групуючи члени з однаковими гармонічними складовими, отримаємо

$$\begin{aligned}
y(t) = & 2c_2a_{-1}a_1W(j\omega_1)W(-j\omega_1) + \\
& + (c_1a_{-1} + 3c_3a_{-1}^2a_1W(j\omega_1)W(-j\omega_1))W(-j\omega_1)e^{-j\omega_1t} + \\
& + (c_1a_1 + 3c_3a_{-1}a_1^2W(j\omega_1)W(-j\omega_1))W(j\omega_1)e^{j\omega_1t} + \\
& + c_2a_{-1}^2W^2(-j\omega_1)e^{-j2\omega_1t} + c_2a_1^2W^2(j\omega_1)e^{j2\omega_1t} + \\
& + c_3a_{-1}^3W^3(-j\omega_1)e^{-j3\omega_1t} + c_3a_1^3W^3(j\omega_1)e^{j3\omega_1t}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Тепер розкладемо у відрізок ряду Фур'є на тому ж проміжку часу T вихідний сигнал $y(t)$, який є реакцією динамічного об'єкта на вхідну синусоїду, тобто представимо його у вигляді

$$y(t) = \sum_{k=-m}^m b_k e^{jk\omega_1 t}, \tag{17}$$

де $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, а

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{T} \int_0^T y(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T y(t) \cos(k\omega_1 t) dt - j \frac{1}{T} \int_0^T y(t) \sin(k\omega_1 t) dt, \quad k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{18}$$

Оскільки у правій частині рівняння (16) маємо лише сталу складову й гармоніки з частотами $-3\omega_1$, $-2\omega_1$, $-\omega_1$, ω_1 , $2\omega_1$, $3\omega_1$, то ряд (17) для реакції $y(t)$ об'єкта на синусоїду частоти ω_1 теж матиме лише ці складові. Саме тому значення k при визначенні коефіцієнтів Фур'є b_k задані лише в межах від -3 до 3 .

Підставляючи значення $y(t)$ з виразу (17) при $m=3$ в рівняння (16), отримаємо тотожність, яка виконуватиметься лише тоді, коли коефіцієнти Фур'є при однакових гармоніках у правій і лівій частинах цієї тотожності дорівнюватимуть один одному.

Завдяки цьому, ми отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases}
b_0 = 2c_2a_{-1}a_1W(j\omega_1)W(-j\omega_1), \\
b_{-1} = (c_1a_{-1} + 3c_3a_{-1}^2a_1W(j\omega_1)W(-j\omega_1))W(-j\omega_1), \\
b_1 = (c_1a_1 + 3c_3a_{-1}a_1^2W(j\omega_1)W(-j\omega_1))W(j\omega_1), \\
b_{-2} = c_2a_{-1}^2W^2(-j\omega_1), \\
b_2 = c_2a_1^2W^2(j\omega_1), \\
b_{-3} = c_3a_{-1}^3W^3(-j\omega_1), \\
b_3 = c_3a_1^3W^3(j\omega_1).
\end{cases} \tag{19}$$

Із шостого та сьомого рівнянь цієї системи знайдемо, що

$$c_3 = \frac{b_{-3} + b_3}{a_{-1}^3W^3(-j\omega_1) + a_1^3W^3(j\omega_1)}, \tag{20}$$

з четвертого та п'ятого рівнянь отримаємо

$$c_2 = \frac{b_{-2} + b_2}{a_{-1}^2W^2(-j\omega_1) + a_1^2W^2(j\omega_1)}, \tag{21}$$

а з другого та третього –

$$c_1 = \frac{b_{-1} - f_{-1}(a_{-1}, a_1, c_3, W) + b_1 - f_1(a_{-1}, a_1, c_3, W)}{a_{-1}W(-j\omega_1) + a_1W(j\omega_1)}, \quad (22)$$

де

$$\begin{cases} f_{-1}(a_{-1}, a_1, c_3, W) = (3c_3 a_{-1}^2 a_1 W(j\omega_1) W(-j\omega_1)) W(-j\omega_1), \\ f_1(a_{-1}, a_1, c_3, W) = (3c_3 a_{-1} a_1^2 W(j\omega_1) W(-j\omega_1)) W(j\omega_1). \end{cases} \quad (23)$$

Як бачимо, перше рівняння системи (19) є надлишковим: його можна використати в якості критерію правильності розв'язання задачі.

Ще одним критерієм правильності розв'язання задачі може служити поява суттєво відмінних від нуля значень коефіцієнтів Фур'є з номерами $k > 3$ та $-k < -3$ у вихідному сигналі $y(t)$ при його розкладенні в ряд (17) за умови, що на вхід об'єкта надходить лише синусоїда однієї частоти ω_1 . Це означатиме, що реальна статична характеристика $y(x)$ об'єкту повинна апроксимуватись степеневим поліномом із порядком вищим за 3-ій. При наявності гармонік з частотою $j4\omega_1$ та $-j4\omega_1$ в сигналі $y(t)$ для апроксимації характеристики $y = f(x)$ поліном потрібно брати 4-го порядку, а за наявності гармонік із частотою $j5\omega_1$ та $-j5\omega_1$ цей поліном повинен мати 5-ий порядок, і так далі за зростанням.

Слід зазначити, що підвищення порядку полінома для апроксимації характеристики $y = f(x)$ не надто ускладнює отримання виразів для розрахунку коефіцієнтів цього полінома за умови використання на вході об'єкта синусоїди лише однієї частоти, оскільки для отримання співвідношень виду (19) і в цьому випадку у виразі виду (14) степені розкриваються за формулою бінома Ньютона.

Із співвідношень (20), (21), (22) випливає, що ідентифікувати екстремальну статичну характеристику $y = f(x)$ динамічного об'єкта класу, що розглядається, можна лише за умови, що відомі значення АФЧХ $W(j\omega)$ лінійної інерційної частини цього об'єкту на частотах ω_1 та $-\omega_1$, тобто відомі $W(j\omega_1)$ та $W(-j\omega_1)$. Тож в наступному розділі статті піде мова про те, як знайти ці значення.

Ідентифікація лінійної інерційної частини динамічного об'єкта.

Із фізики будь-якого динамічного об'єкту випливає, що доки його масовий чи енергетичний об'єм не наповниться масою чи енергією, які надходять разом із вхідним впливом, принаймні, наполовину, доти процеси в цьому об'єкті наростають лінійно, за виключенням близької до нуля зони нечутливості або люфту.

Тож, якщо сформувати вхідний вплив на об'єкт так, щоб його рівень відповідав усталеному рівню реакції цього об'єкта на прикладений вхідний вплив (рис. 3), то можна стверджувати, що в діапазоні значень вихідної координати $y(t)$ від $0,1y_{уст}$ до $0,5y_{уст}$ об'єкт поводитиметься як лінійний.

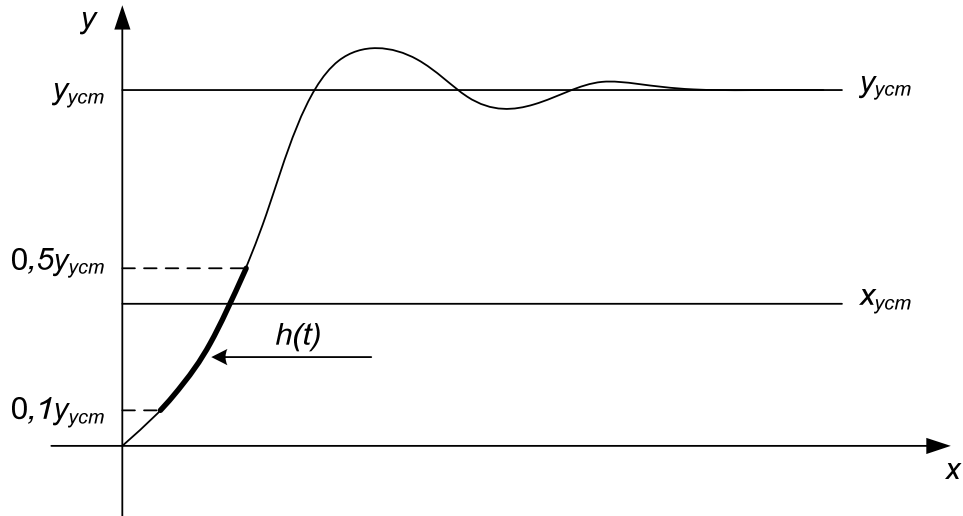


Рис. 3. Графік перехідного процесу в динамічному об'єкті після подачі на його вхід ступінчастого впливу на рівні його усталеного значення

І якщо вхідний вплив подається стрибком від 0 до $x_{уст}$, то у вказаному діапазоні значень $y(t)$ вихідна координата буде збігатися з перехідною характеристикою $h(t)$ лінійної частини цього об'єкта, яка для об'єкта з одним об'ємом концентрації енергії чи маси має вигляд:

$$h(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right), \quad (24)$$

для об'єкта з двома об'ємами концентрації енергії чи маси –

$$h(t) = K \left(1 - \lambda_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - \lambda_2 e^{-\frac{t}{T_2}} \right), \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad (25)$$

або

$$h(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \cos \beta t \right), \quad (26)$$

а для об'єкта з трьома об'ємами концентрації енергії чи маси –

$$h(t) = K \left(1 - \lambda_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - \lambda_2 e^{-\frac{t}{T_2}} - \lambda_3 e^{-\frac{t}{T_3}} \right), \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \quad (27)$$

або

$$h(t) = K \left(1 - \lambda_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - \lambda_2 e^{-\frac{t}{T_2}} \cos \beta t \right), \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1. \quad (28)$$

Для більшої кількості об'ємів концентрації енергії чи маси ряд апроксимативних функцій для $h(t)$ можна продовжити, користуючись тим же принципом, але в цьому немає потреби, оскільки в задачах синтезу систем екстремального регулювання передаточну функцію Наукові праці ВНТУ, 2009, № 2

лінійної частини динамічного об'єкту немає сенсу брати вище третього порядку, адже система регулювання робочу точку від точки екстремуму далеко не відпускає.

Очевидно, що для всіх наведених вище виразів для $h(t)$ параметр K можна знайти з виразу

$$K = \frac{y_{уст}}{x_{уст}}. \quad (29)$$

Тож для апроксимації $h(t)$ у вигляді (24) потрібно з кривої $y(t)$ (див. рис. 3) скористатися лише однією точкою в діапазоні $0,1y_{уст} \leq y(t) \leq 0,5y_{уст}$ для визначення параметра T_1 . Очевидно, що його можна знайти з рівняння

$$h(t_1) = K \left(1 - e^{-\frac{t_1}{T_1}} \right). \quad (30)$$

Для апроксимації $h(t)$ у вигляді (26) для визначення параметрів T_1 та β потрібно скористатись уже двома точками з цього ж діапазону $[0,1y_{уст}; 0,5y_{уст}]$. Для них система рівнянь матиме вигляд

$$\begin{cases} h(t_1) = K \left(1 - e^{-\frac{t_1}{T_1} \cos \beta} \right), \\ h(t_2) = K \left(1 - e^{-\frac{t_2}{T_1} \cos \beta} \right). \end{cases} \quad (31)$$

У такий же спосіб можна розрахувати параметри всіх інших апроксимацій характеристики $h(t)$.

Після цього необхідно, скориставшись кількома (наприклад, M) точками діапазону $[0,1y_{уст}; 0,5y_{уст}]$ з індексом l , розрахувати для всіх знайдених апроксимацій $h_i(t)$, $i = \overline{1, r}$ середній квадрат Δ_i похибки апроксимації за виразом

$$\Delta_i = \sum_{l=1}^M (y_l^* - h_i(t_l))^2, \quad i = \overline{1, r}, \quad (32)$$

де y_l^* – значення перехідної характеристики, взяті з експериментального графіка (див. рис. 3), а $h_i(t_l)$ – значення цієї характеристики, вираховані за апроксимуючим виразом.

Те з чисел $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_r$, яке буде найменшим, і визначатиме найкращу апроксимацію перехідної характеристики $h(t)$ лінійної частини динамічного об'єкта за критерієм мінімуму суми квадратів похибок на «свіжих» точках.

Знаючи перехідну характеристику $h(t)$ лінійної частини об'єкта, легко знайти її передаточну функцію $W(p)$, адже [1]

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}, \quad (33)$$

а для отримання $W(p)$ за відомою $g(t)$ потрібно скористатися виразом (9).

В свою чергу значення $W(j\omega_1)$ і $W(-j\omega_1)$, які потрібні нам для ідентифікації

екстремальної статичної характеристики $y = f(x)$, ми отримуємо прямою підстановкою у вираз для передаточної функції $W(p)$, отриманий за перетворенням (9), замість оператора p значень $j\omega_1$ та $-j\omega_1$.

Звичайно, якщо після кількох однотипних експериментів з подачею на вхід об'єкта однакового рівня вхідного впливу ступінчастого характеру ми отримуємо експериментальні криві $y(t)$, які не збігатимуться у діапазоні $[0,1y_{уст}; 0,5y_{уст}]$, то параметри апроксимацій $h(t)$ у вигляді (24)–(28) слід обчислювати, користуючись стандартною процедурою методу найменших квадратів [3].

Висновки

1. Запропоновано метод ідентифікації нелінійних динамічних об'єктів з екстремальними характеристиками, алгоритм якого передбачає подачу на вхід об'єкта спочатку ступінчастого сигналу, а потім синусоїди однієї частоти.

2. Лінійна інерційна частина динамічного об'єкта за даним методом ідентифікується перехідною характеристикою $h(t)$ з наступним переходом до імпульсної перехідної характеристики $g(t)$ та передаточної функції $W(p)$ і АФЧХ $W(j\omega)$, а нелінійна безінерційна статична характеристика $y = f(x)$ об'єкта ідентифікується степеневим поліномом.

3. Під час виведення розрахункових співвідношень запропонованого методу використана ідеологія Фур'є-інтегрального методу ідентифікації (ФІМІ), розробленого у 80-х роках минулого сторіччя Б. І. Мокіним.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Куропаткин П.В. Теория автоматического управления. – М.: Высшая школа, 1973. – 528 с.
2. Василенко Г.И., Тараторин А.М. Восстановление изображений. – М.: Радио и связь, 1986. – 304 с.
3. Мокін Б.І., Мокін В.Б., Мокін О.Б. Математичні методи ідентифікації електромеханічних процесів. – Вінниця: Універсум-Вінниця, 2005. – 300 с.
4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике (для инженеров и учащихся втузов). – М.: Наука, 1967. – 608 с.

Мокін Борис Іванович – професор кафедри електромеханічних систем автоматизації в промисловості і на транспорті, ректор;

Мокін Олександр Борисович – доцент кафедри електромеханічних систем автоматизації в промисловості і на транспорті.

Вінницький національний технічний університет.