УДК 338.5.0187

В. В. Гоцуленко, к. т. н., доц.; О. О. Піддубна

АНАЛІЗ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО ВИХОДУ НА ГРАНИЧНИЙ ЦИКЛ

Для одного класу нелінійних зосереджених динамічних систем проведено їх біфуркаційний аналіз і розглянуто задачу оптимального виходу на граничний цикл.

Ключові слова: *біфуркація, атрактор, біфуркаційний параметр, граничний цикл, оптимальне керування.*

Вступ і постановка задачі. В описі математичної моделі багатьох динамічних систем беруть участь величини, які математично є функціями часу й між якими існують складні нелінійні залежності, ідентифікація яких часто буває фактично неможливою. Тому для детального аналізу з метою прогнозування таких систем потрібно зі всього різноманіття змінних виділяти найбільш значущі й далі досліджувати співвідношення лише між ними.

Так, зокрема для умовних замкнутих економічних систем як основні змінні можна виділити: x – величину вкладеного капіталу, y – отриманий прибуток. Припускаючи, що режим динаміки є майже сталим (тобто $t \to \infty$) і тривалість циклу капіталообігу $\tau << t$, динамічні змінні $x(t)$ і $y(t+\tau) = y(t) + O(\tau) \approx y(t)$ можна віднести до одного моменту часу t і тим самим вивчати динаміку у фазовій площині. Далі цілком природно припустити існування функціонального зв'язку $y = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ з деякою гладкою функцією f. Дійсно, отриманий прибуток y залежить від величини вкладеного капіталу, але також і від тенденції його надходження (зміни) в часі, тобто від $\frac{dx}{dt}$. З тієї ж причини, розглядаючи в якомусь розумінні зворотний зв'язок, отримуємо, що $x = g\left(y, \frac{dy}{dt}\right)$ з деякою гладкою функцією g.

Будемо вважати, що керуючим параметром в цій економічній системі, а точніше в цій математичній моделі, є ціна. Ідентифікація функцій f і g для певної досліджуваної економічної системи є окремою задачею, яка частково залежить від експертних знань про структуру досліджуваної системи. Проте, як показано в ряді робіт [4, 7 – 8], достатньо широкий клас задач охоплено, коли функції f і g представлено в такій адитивній формі: $f(t_1, t_2) = H(t_1) + \sigma(t_2)$ і $g(t_1, t_2) = \varphi(t_1) + \theta(t_2)$. Далі ми ще більше конкретизуємо ситуацію, вважаючи, що $\sigma(t_2) = \sigma_{cp} \cdot t$ і $\theta(t_2) = \theta_{cp} \cdot t_2$. Тоді остаточно приходимо до такої динамічної системи:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha \cdot (H(x) - y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta \cdot (x - \varphi(y)), \end{cases} \tag{1}$$

де $\sigma_{cp} = -\frac{1}{\alpha}$ і $\theta_{cp} = \frac{1}{\beta}$.

Зазначимо, що функції H і φ, які беруть участь у формуванні системи (1), мають прозорий економічний зміст [8] і часто називаються характеристиками.

Біфуркационний аналіз. Математичне моделювання різних питань природознавства часто призводить до вивчення систем диференційних рівнянь, що містять параметри. Таке вивчення починається зазвичай із знаходження нерухомих точок (стаціонарних розв'язків) в їхній залежності від параметрів і в міру можливості виявлення періодичних режимів. Виявлення біфуркації народження циклу [1, 3 – 4] (тобто біфуркації Хопфа) – один з етапів цього дослідження.

Нижче розглянемо питання виникнення біфуркації народження циклу в динамічній системі (1), коли її характеристики явно залежать від керуючого параметра ціни p :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha \cdot \left(H(x,p) - y\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta \cdot \left(x - \varphi(y,p)\right), \end{cases} \tag{2}$$

де $\alpha, \beta = const > 0$ і p – параметр біфуркації.

Щодо системи (2) припустимо наступне: $\begin{cases} H(\xi,p) = y_o \\ \varphi(y_o,p) = \xi \end{cases}$ за будь-якого p з деякого інтервалу I_{p_o}, (ξ, y_o) – ізольована нерухома точка системи, функції $H(x,p)$ і $\varphi(y,p)$ аналітичні на множинах $I_\xi \times I_{p_o}$ та $I_{y_o} \times I_{p_o}$ відповідно.

ТЕОРЕМА. Нехай 1) $\alpha \dfrac{\partial H(\xi, p_o)}{\partial x} = \beta \dfrac{\partial \varphi(y_o, p_o)}{\partial y}$;

2) $\alpha \dfrac{\partial^2 H(\xi, p_o)}{\partial x \partial p} \neq \beta \dfrac{\partial^2 \varphi(y_o, p_o)}{\partial y \partial p}$;

3) або $\left|\dfrac{\partial \varphi(y_o, p_o)}{\partial y}\right| < \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$.

Тоді $\exists$ число $\varepsilon_{Hopf} > 0$ і аналітична функція, $\mu_{Hopf}(\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_{Hopf}$, така, що $\forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_{Hopf})$ система (2) має при $p = p_{Hopf}(\varepsilon)$ аналітичний періодичний розв'язок $[x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)]$, з періодом $T_{Hopf}(\varepsilon) = \dfrac{2\pi}{\omega_o}\left\{1 + \sum\limits_{j=2}^{\infty} \tau_j \varepsilon^j\right\}$, де $\omega_o = \sqrt{\alpha\beta - \dfrac{1}{4}\left(\alpha \dfrac{\partial H(\xi, p_o)}{\partial x} + \beta \dfrac{\partial \varphi(y_o, p_o)}{\partial y}\right)^2}$. Більш того, для кожного $L > \dfrac{2\pi}{\omega_o}$ існує околиця $\Re$ точки (ξ, y_o) і інтервал $\widetilde{I} \ni p_o$, такі, що для кожного значення ціни $p \in \widetilde{I}$ єдиними непостійними періодичними розв'язками системи (2), які лежать в $\Re$ і мають період менший за L, є члени сімейства $[x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)]$, для яких $p_{Hopf}(\varepsilon) = p$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{Hopf})$.

Доведення. Припустимо $\Omega = \begin{bmatrix} \alpha \cdot (H(x,p) - y), \\ \beta \cdot (x - \varphi(y,p)) \end{bmatrix}$, тоді матриця Якобі цього вектора має вигляд:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial (x,y)} = \begin{bmatrix} \alpha \dfrac{\partial H(\xi, p_o)}{\partial x} & -\alpha \\ \beta & -\beta \dfrac{\partial \varphi(y_o, p_o)}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Нехай $\lambda(p)$ і $\overline{\lambda}(p)$ – корені характеристичного рівняння:

$$\det\left[\frac{\partial\Omega}{\partial(x,y)}-\lambda E\right]=0,$$

тоді елементарно перевіряється те, що:

$$\operatorname{Re}\lambda(p)=\frac{1}{2}\left(\alpha\frac{\partial H}{\partial x}-\beta\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\ \text{ і }\ \operatorname{Im}\lambda(p)=\sqrt{\alpha\beta-\frac{1}{4}\left(\alpha\frac{\partial H}{\partial x}+\beta\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}.$$

Далі з теореми Хопфа [1], слідує, що для доведення теореми достатньо довести, що:

$$\operatorname{Re}\lambda(p_o)=0\ \text{ і }\ \omega_o\overset{def}{=}\operatorname{Re}\lambda(p_o)>0.$$

Але з 1) автоматично слідує, що $\operatorname{Re}\lambda(p_o)=0$, а оскільки

$$\frac{d}{dp}\operatorname{Re}\lambda(p_o)=\frac{1}{2}\left(\alpha\frac{\partial^2 H(\xi,p_o)}{\partial x\partial p}-\beta\frac{\partial^2\varphi(y_o,p_o)}{\partial y\partial p}\right),$$

то з умови 2) слідує, що $\frac{d}{dp}\operatorname{Re}\lambda(p_o)\neq 0$.

Тепер з умов 1) і 3) слідує, що $\operatorname{Im}\lambda(p_o)>0$. Дійсно, нехай $\left|\frac{\partial H(\xi,p_o)}{\partial x}\right|<\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, тоді маємо:

$$\{\operatorname{Im}\lambda(p_o)\}^2=\alpha\beta-\frac{1}{4}\left(\alpha\frac{\partial H}{\partial x}+\beta\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=\alpha\beta-\alpha^2\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2>\alpha\beta-\alpha^2\frac{\beta}{\alpha}=0,$$

що й потрібно було довести. Отже, теорему доведено.

Далі, як обґрунтовується в роботах [4, 7], скористаємося наступними апроксимаціями (рис. 1), наближаючи функцію $H(x,p)$ поліномом 3-го ступеня, а також вважаючи $\varphi(y,p)=k\cdot\sqrt{y}$. У зв’язку з цим нам знадобиться наслідок доведеної теореми, наведений нижче.

НАСЛІДОК. Нехай $0<b<a$, $\Psi_{a,b}(x)=x\cdot(x-a)(x-b)$, $h_p(x)=\gamma(p)\cdot\Psi_{a,b}(x)$, $H(x,p)=h_p(x)-h_p(\xi)+y_o$, $\varphi(y,p)=\xi\cdot\sqrt{\frac{y}{y_o}}$, $\xi\notin\{0,a,b\}$, $\frac{d\gamma(p_o)}{dp}\neq 0$, $\gamma(\mu_o)\cdot\Psi_{a,b}(\xi)<2\frac{y_o}{\xi}$.

Тоді якщо $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{2}\frac{\xi}{y_o}\gamma(p_o)\cdot\Psi_{a,b}(\xi)$, то $\exists\ p\approx p_o$, при якому система (2) має періодичний розв’язок.

Характер перебудови фазового портрета системи (2) під час варіювання параметра біфуркації p, а також рівноважних значень вкладеного капіталу ξ представлено на рис. 2. Відповідна динаміка в розширеному фазовому просторі представлена на рис. 3.

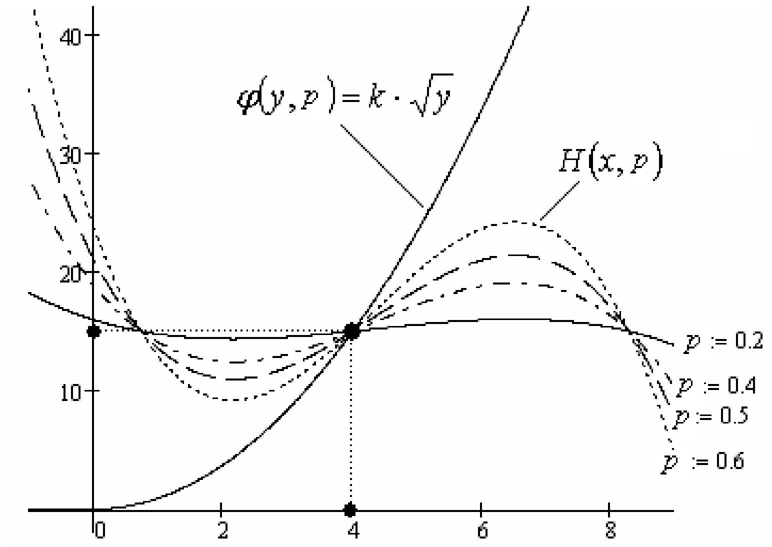

Рис. 1. Ілюстрація деформації характеристик H і φ при зміні ціни p як параметра біфуркації

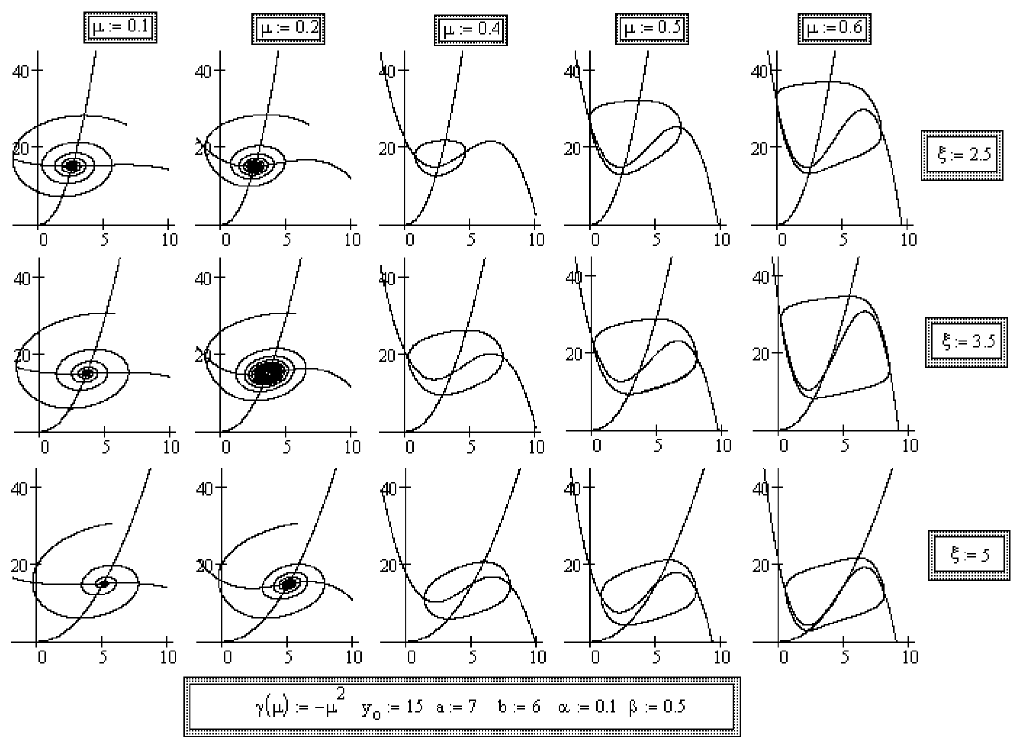

Рис. 2. Ілюстрація біфуркації Хопфа у фазовому просторі системи (2)

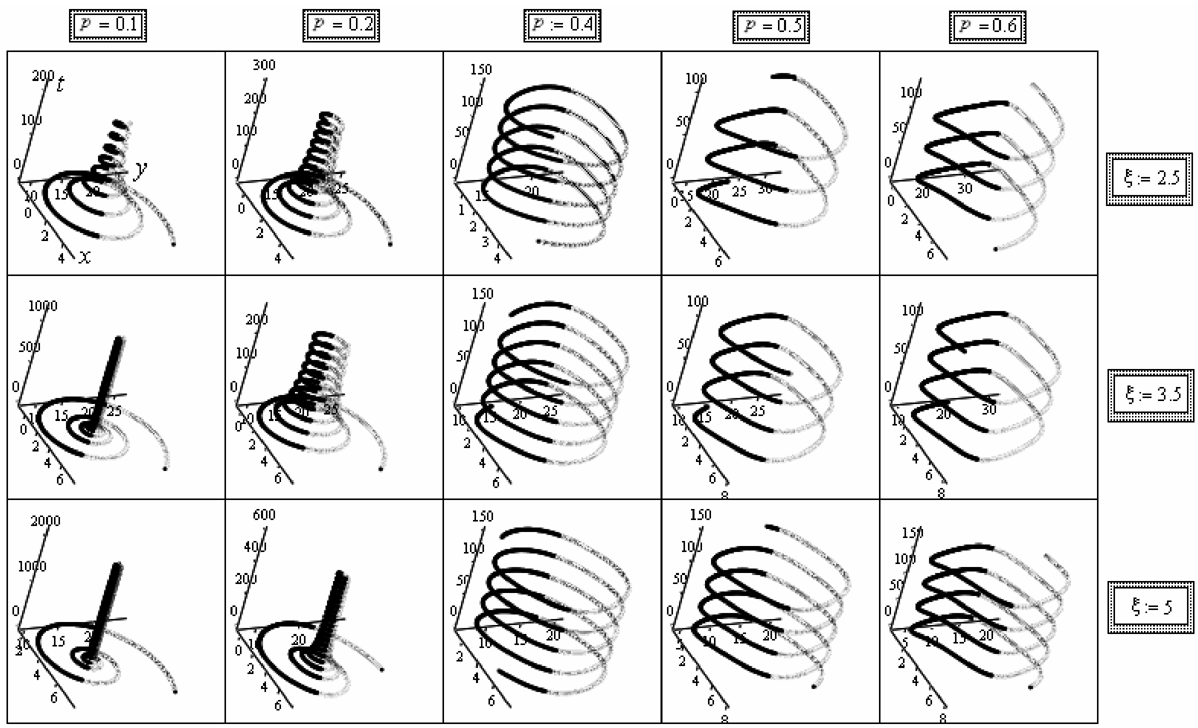

Рис. 3. Ілюстрація біфуркації Хопфа в розширеному фазовому просторі

Аналіз задачі керування. Як відомо, атрактори дисипативних динамічних систем описують їхню динаміку на сталому режимі, тобто будь-яка фазова траєкторія, що починається в басейні тяжіння атрактора, з часом необмежено до нього наближається, або, як говорять умовно, виходить на атрактор. На практиці всі системи є дисипативними. Із позицій економіки важлива стабільність динаміки, а всі перехідні процеси є лише проміжними етапами. Тому задача мінімізації часу виходу на аттрактор (тобто часу перехідного режиму) за заданих початкових умов є актуальною. При цьому, як правило, в якості керуючих параметрів виступають величини, пов'язані з ресурсами системи. У нашому випадку таким керуючим параметром є ціна, а функціонал якості розглядається як час мінімізації виходу на граничний цикл системи (2) за заданих початкових умов. Множина допустимих керувань U^{∂} визначається таким чином:

$$U^{\partial} = \{p \in KC[t_0, t_1]: p_{\min} \le p(t) \le p_{\max} \;\; \forall t \in [t_0, t_1]\}, \qquad (3)$$

де через $KC[t_0, t_1]$ позначена множина всіх кусково-неперервних на відрізку $[t_0, t_1]$ функцій, причому кінці відрізка не фіксуються.

Як випливає з принципу максимуму Понтрягіна [2], оптимальні керування є кусково-сталими функціями. Тому, ввівши в розгляд клас керувань

$$U^{\partial}[p_0, \varepsilon, T, \varphi_0] = \{p(t) = p_0 + \varepsilon\,\mathrm{sgn}[\sin(T \cdot t + \varphi_0)]\} \subset U^{\partial}, \qquad (4)$$

отримаємо, що для оптимального керування $\tilde{p}(t)$ знайдуться такі значення $p_0, \varepsilon, T, \varphi_0$, що справедливе включення $\tilde{p}(t) \in U^{\partial}[p_0, \varepsilon, T, \varphi_0]$.

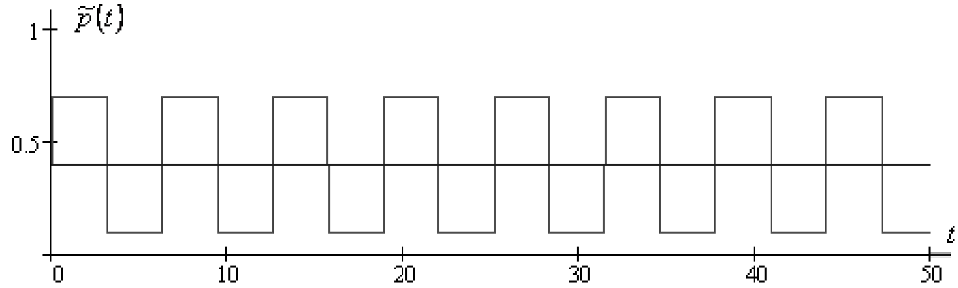

Рис. 4. Залежність оптимального керування при $p_o = 0.4$, $\varepsilon = 0.3$, $T = 1$, $\varphi_0 = 0$

Результат чисельного інтегрування системи рівнянь (2) за оптимальної стратегії ціни $\tilde{p}(t)$ (рис. 4) зображено на рис. 5.

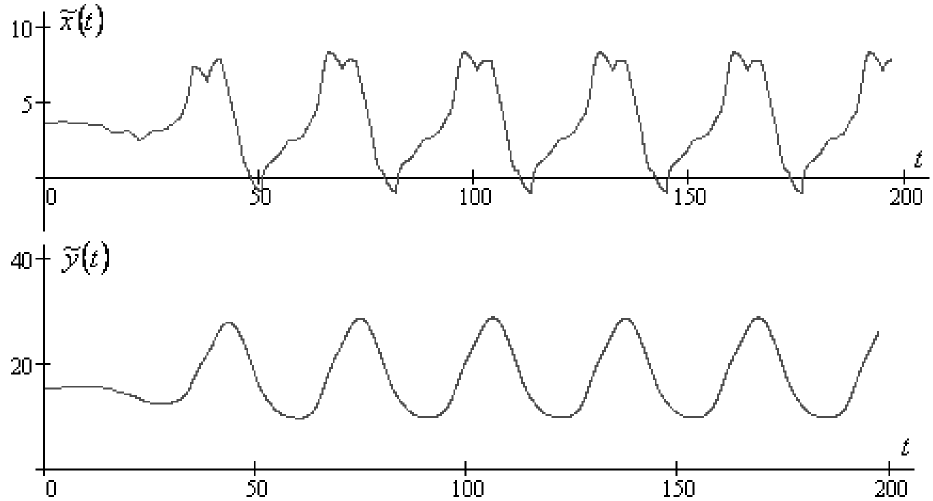

Рис. 5. Залежність у часі оптимальних траєкторій $\tilde{x}(t)$ и $\tilde{y}(t)$

Висновки. Проведений аналіз у рамках даної математичної моделі показує, що за оптимальної стратегії керування ціною функції капіталовкладень і прибутку коливаються синхронно з однаковими частотами, проте характер капіталовкладень менш гладкий і має в області максимуму сплески. Цікавим є той факт, що за оптимальної стратегії функції прибутку на відповідній стратегії капіталовкладень розташовані ділянки з від'ємними капіталами, які, наприклад, можна інтерпретувати як додатковий прибуток.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Хессард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложение бифуркации рождения цикла. – М.: Мир, 1985. – 280 с.
2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Физматгиз, 1961. – 391 с.
3. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. – М.: Мир, 1983. – 300 с.
4. Д. Эрроумсмит, К. Плейс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1986. – 240 с.
5. Занг В. Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории. – М.: Мир, 1999. – 335 с.
6. Гоцуленко В.В., Самохвалов Т.С. Об одном классе стратегий капиталовложений в замкнутой экономической системе // Международная научная конференция "Ломоносовские чтения 2004". – Севастополь: Изд-во Черноморского филиала МГУ, 2004. – С. 9.
7. Андрейшина Н.Б., Гоцуленко В.В. Об одном классе экономических систем обладающих предельным циклом // Міжнародна науково - практична конференція "Розвиток економіки в трансформаційний період: глобальний та національний аспекти". – Дніпропетровськ, 2005 р. – С. 72-73.
8. Андрейшина Н.Б., Гоцуленко В.В. Повышение эффективности деятельности торгового предприятия оптимальным выбором цены как функции времени // Вестник Национального технического университета

“ХПИ”. 2006. № 39. – С. 81 – 85.

Гоцуленко Володимир Володимирович – к. т. н., доцент, кафедра економічної кібернетики, e-mail: gosul@ukr.net, тел.: 80667807710.

Піддубна Ольга Олександрівна – ст. викладач, кафедра економічної кібернетики, тел.: (05652) 2-75-86.

м. Жовті Води, інститут підприємництва “Стратегія”.