УДК 621.311.75

П. Д. Лежнюк, д. т. н., проф.; О. Ю. Петрушенко; Жан-П'єр Нгома, к. т. н., доц.

ВИЗНАЧЕННЯ ВТОРИННИХ КРИТЕРІЇВ ТА ІНДИКАТОРІВ ПОДІБНОСТІ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ СТАНІВ СИСТЕМ

Розглядаються способи визначення вторинних критеріїв та індикаторів подібності для встановлення параметричної подібності в досліджуваному процесі. Показано, що за допомогою вторинних критеріїв та індикаторів подібності можуть розв'язуватися задачі оптимізації станів систем.

Ключові слова: *подібність, вторинні критерії, індикатори, складні системи, оптимізація.*

Вступ

В прикладних задачах теорії подібності та моделювання використовуються вторинні критерії подібності, які є відношенням критеріїв подібності [1]. Останні ж за визначенням [1] є безрозмірними комбінаціями параметрів, які чисельно одинакові для всіх подібних процесів. За допомогою вторинних критеріїв подібності встановлюється параметрична подібність процесів, що досліджуються. Надто важливими вторинні критерії подібності є тоді, коли вони характеризують параметричну подібність оптимальних варіантів. Таким, наприклад, є критерій Кельвіна, який відображає оптимальне співвідношення складових витрат на спорудження ліній електропередачі [2]. Вторинні критерії встановлюють стійкі співвідношення між окремими складовими цільової функції, які за певних умов можуть трактуватися як закони оптимального керування процесами в системі [3].

В даній статті розглядаються способи визначення вторинних критеріїв і приклади використання їх в задачах оптимального керування.

Постановка задачі щодо визначення вторинних критеріїв та індикаторів подібності

Сформулюємо задачу оптимального керування таким чином:
мінімізувати

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m_1} a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} \tag{1}$$

за умов

$$g_k(x) = \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} \le G_k, \quad k = \overline{1,h}, \quad x_j > 0, \tag{2}$$

де f(x) – деякий узагальнений техніко-економічний показник процесу, який оптимізується; g(x) – обмеження, які встановлюють допустиму область дослідження процесу; a_i , α_{ji} G_k – сталі коефіцієнти, які визначаються властивостями системи; x_j - змінні параметри системи, значення яких оптимізуються; m_1 – кількість членів цільової функції; m – сумарна кількість членів цільової функції і обмежень; n – кількість змінних; h – кількість обмежень.

У виразах (1) і (2) для зручності подальшого аналізу прийнята суцільна індексація складових цільової функції і обмежень.

Для задачі (1) – (2) можливі два види критеріїв подібності в залежності від обраної бази. Згідно способу інтегральних аналогів критерії подібності визначаються діленням всіх членів рівняння на один з них [1]. Якщо вибрати за базовий, наприклад, l-й член, то отримаємо критерії подібності виду

$$\pi_i = \frac{a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}}}{a_l \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{jl}}}. \tag{3}$$

Якщо за базу прийняти f(x), то критерії подібності матимуть вид

$$\pi_i = \frac{a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}}}{f(x)}. \tag{4}$$

В останньому випадку критерії подібності, які відносяться до цільової функції, мають зміст вагових коефіцієнтів і характеризують вклад кожного члена в значення критерію оптимальності. Критерії подібності, які відносяться до обмежень, характеризують чутливість критерію оптимальності до останніх. В [4] показано, що $\lambda_k = \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_i$ – це нормовані множники Лагранжа k-го обмеження.

Очевидно, що переважно в задачах оптимального керування використовується друга форма критеріїв подібності, оскільки вони в цьому випадку є більш інформативними [4]. Особливо, коли критерії подібності визначені для екстремального значення критерію оптимальності згідно задачі (1) – (2). В цьому випадку кожен критерій подібності показує, яку частку вносить в оптимальне значення критерію оптимальності відповідний член цільової функції. З виразів виду (4) може бути сформована система рівнянь стосовно змінних x_j , з якої за умови оптимальності π_{io} визначаються оптимальні значення x_{jo}. Це так звана зворотна задача критеріального програмування [4].

В залежності від форми виразів цільової функції і обмежень, а також співвідношення кількості членів m і кількості змінних n задача (1)–(2) розв'язується за різними алгоритмами. Коли задача (1)–(2) існує в аналітичному вигляді, тобто відомі коефіцієнти a_i , α_{ji}, то можливі два випадки: 1) s=m–n+1=0, 2) s=m–n+1>0. В (1)–(2) можуть бути відомі показники степені α_{ji} , які визначають характер залежностей f і g, а коефіцієнти a_i невідомі або відомі частково, або задані можливим діапазоном існування.

В даній статті розглядаються алгоритми розв'язання задачі аналітично сформульованої з мірою складності s=0 і s>0.

Визначення вторинних критеріїв та індикаторів подібності

Оптимальні значення критеріїв подібності для задачі (1)–(2) визначаються з умов ортогональності і нормування [4]:

$$\boldsymbol{\alpha\pi} = \mathbf{b}, \tag{5}$$

де $\boldsymbol{\alpha} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\ \alpha_{13}\dots\ \alpha_{1m} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\dots\alpha_{2m} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\dots\alpha_{nm} \\ 1\quad 1\dots\ 0\ \ \dots\ 0 \end{vmatrix}$; $\boldsymbol{\pi} = \begin{vmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \dots \\ \pi_m \end{vmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{vmatrix}$.

В останньому рядку матриці **α** кількість одиниць дорівнює кількості членів в цільовій функції (1), а саме m_1 . Якщо система рівнянь (5) визначена (s=0), то критерії подібності можуть бути знайдені за правилом Крамера [5]:

$$\pi_i = \frac{\|\boldsymbol{\alpha}\|_i}{\|\boldsymbol{\alpha}\|} = \|\boldsymbol{\alpha}\|^{-1} \sum_{t=1}^{n+1} b_t \|\boldsymbol{\alpha}_{ti}\|, \quad i = \overline{1,m}, \tag{6}$$

де $\|\boldsymbol{\alpha}\|$ – визначник матриці $\boldsymbol{\alpha}$ системи рівнянь (5); $\|\boldsymbol{\alpha}\|_{\mathrm{i}}$ – визначник матриці $\boldsymbol{\alpha}$, в якій замість і-го стовпця записаний вектор вільних членів **b**; $\|\boldsymbol{\alpha}_{ti}\|$ – алгебраїчні доповнення, записані по і-му стовпцю матриці $\boldsymbol{\alpha}$, в якій замість і-го стовпця записаний вектор вільних членів **b**.

З врахуванням значень складових вектора **b**, останній вираз перепишеться:

$$\pi_i = \|\boldsymbol{\alpha}\|^{-1} \|\boldsymbol{\alpha}_{n+1,i}\|, \quad i = \overline{1,m}. \tag{7}$$

Скористуємося тепер виразом (7) і запишемо вторинний критерій подібності як відношення p-го й q-го критеріїв подібності:

$$\pi_{pq} = \pi_p / \pi_q = \|\boldsymbol{\alpha}_{n+1,p}\| \|\boldsymbol{\alpha}_{n+1,q}\|^{-1}. \tag{8}$$

З (7) та (8) видно, що за умови m=n+1, як критерії подібності, так і вторинні критерії подібності визначаються тільки показниками степені параметрів x_j .

Окремий випадок, коли деякий параметр x_j входить тільки в два члени рівняння – p-й і q-й. В цьому випадку для параметра x_j умова ортогональності запишеться

$$\alpha_{jp}\pi_p + \alpha_{jq}\pi_q = 0.$$

З останнього рівняння виходить, що вторинний критерій подібності

$$\pi_{pq} = \pi_p / \pi_q = -\alpha_{jq}\ \alpha_{jp}^{-1}. \tag{9}$$

Зауважимо, що виразом (9) на відміну від (8) можна скористатися і тоді, коли система рівнянь (5) є невизначеною (в критеріальному програмуванні це відповідає задачі з мірою складності s=m-n-1>0 [4]). Це значить, що вторинні критерії можуть бути визначені при дослідженні як канонічних, так і неканонічних моделей.

В задачах оптимального керування станами динамічних систем замість критеріїв подібності можуть використовуватися індикатори подібності, які визначаються масштабами величин, що входять в (1)–(2). Застосування останніх забезпечує певні переваги. Зокрема система оптимального керування стає більш раціональною через те, що критерії подібності визначаються не стосовно параметрів x_j, а відносно параметрів керування u_j, якими оптимізуються стани системи і які функціонально зв'язані з x_j [6]. Сказане відноситься до систем оптимального керування з еталонною моделлю. В цьому випадку необхідно встановлювати подібність між системою-оригіналом і її моделлю в системі керування, а також числові співвідношення між параметрами керування оригіналу u_{jop} і моделі $u_{jм}$.

В [6] показано, що індикатори подібності кожного члена задачі (1) – (2) визначаються як

$$\mu_i = \frac{\mu_{a_i} \prod_{j=1}^{n} \mu_{x_j}^{\alpha_{ji}}}{\mu_f} = 1, \tag{10}$$

де μ_{a_i}, μ_{x_j}, μ_f – масштабні коефіцієнти відповідних величин.

Критерії подібності визначаються за формулою (6), але, оскільки вони в даному випадку обчислюються у диференційній системі відносних одиниць, то вектор **b** на відміну від (5) буде рівним [3]:

$$\mathbf{b} = |b_1; b_2; \ldots b_n; 1|,$$

де $b_j = \dfrac{\partial f / \partial x_j}{f_o / x_{jo}}, \quad j = \overline{1,n}$.

Таким чином, простого виразу для визначення індикаторів подібності, аналогічного (9), отримати не вдається.

Як відомо [1], щодо встановлення подібності процесів критерії подібності та індикатори подібності є рівнозначними. Проте, як видно з (10), відношення критеріїв подібності окремих членів математичної моделі процесу і відповідних індикаторів подібності не еквівалентне. Можна припустити, що, якщо параметрична подібність проявляється через відношення критеріїв подібності, то вона може бути встановлена також через відношення індикаторів подібності.

За умови, що цільова функція відносно параметрів керування апроксимована поліномом виду (1)

$$F(u) = \sum_{i=1}^{m_1} a_i \prod_{j=1}^{n} u_j^{\alpha_{ji}},$$

індикатори подібності для параметрів керування u_j запишуться [6]

$$\mu_{u_j} = \prod_{i=1}^{m} \mu_{a_i}^{\frac{\|\boldsymbol{\alpha}_{ji}\|}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}}, \quad j = \overline{1,n}, \tag{11}$$

де $\boldsymbol{\alpha}_{ji}$ – алгебраїчні доповнення елементів α_{ji}, які взяті зі зворотним знаком.

Якщо параметрична подібність існує між параметрами керування p-м і q-м, то для них мають бути однаковими індикатори подібності. З врахуванням (11) ця умова запишеться

$$\mu_{pq} = \frac{\mu_{u\,p}}{\mu_{u\,q}} = \frac{\prod_{i=1}^{m} \mu_{a_i}^{\|\boldsymbol{\alpha}_{pi}\| \|\boldsymbol{\alpha}\|^{-1}}}{\prod_{i=1}^{m} \mu_{a_i}^{\|\boldsymbol{\alpha}_{qi}\| \|\boldsymbol{\alpha}\|^{-1}}} = 1,$$

яка після спрощення прийме вигляд

$$\mu_{pq} = \prod_{i=1}^{m} \mu_{a_i}^{(\|\boldsymbol{\alpha}_{pi}\| - \|\boldsymbol{\alpha}_{qi}\|)\|\boldsymbol{\alpha}\|^{-1}} = 1.$$

З останнього виразу слідує, що коли в досліджуваному процесі наявна параметрична подібність, то для того, щоб вона зберігалася і в моделі цього процесу, необхідно щоб виконувалася умова

$$\|\boldsymbol{\alpha}_{pi}\| = \|\boldsymbol{\alpha}_{qi}\|. \tag{12}$$

Тобто, повинні бути однаковими відповідні алгебраїчні доповнення однойменних параметрів в процесі-оригіналі і в його моделі.

Приклад

Для ЛЕП 330 – 750 кВ втрати активної потужності в них залежать від перетоків активної і реактивної потужностей, а також від втрат, обумовлених коронним розрядом (втрати на корону). Тобто, втрати в лінії визначаються як [7]

$$\Delta P = \Delta P_k + \Delta P_P + \Delta P_Q, \tag{13}$$

де $\Delta P_k = k_k L U^{\alpha_{11}}$ – втрати на корону; $\Delta P_P = r_o L P^2 U^{-2}$ – втрати від перетоків активної потужності P; $\Delta P_Q = r_o L Q^2 U^{-2}$ – втрати від перетоків реактивної потужності Q; k_k – коефіцієнт, що характеризує рівень втрат на корону в 1 км лінії для даної конструкції фази і даній погоді; α_{11} – показник, що характеризує залежність втрат на корону від напруги U за певних погодних умов; r_o – питомий активний опір лінії.

В загальному вигляді (13) як функція втрат від напруги запишеться:

$$\Delta P = a_1 U^{\alpha_{11}} + a_2 U^{-\alpha_{12}}, \tag{14}$$

де $a_1=k_k L$; $a_2=r_o LP^2+r_o LQ^2$; $\alpha_{11}=3\div 8$; $\alpha_{12}=2$.

Встановимо, якими мають бути оптимальні співвідношення в ЛЕП між втратами на корону (перша складова (14)) і навантажувальними втратами (друга складова (14)). Згідно (9)

$$\pi_{12} = \pi_1 / \pi_2 = \alpha_{12} / \alpha_{11} = 2 / \alpha_{11}. \tag{15}$$

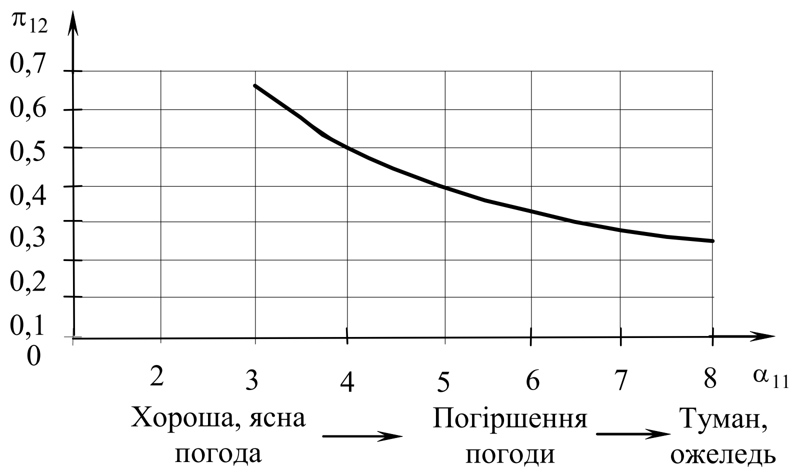

Рис 1. Оптимальне співвідношення втрат в ЛЕП

З аналізу залежності (15) видно, що оптимальне відношення між втратами на корону і навантажувальними залежить від погодних умов. За хорошої погоди (α_{11}=3) втрати на корону і навантажувальні втрати в ЛЕП мають бути у співвідношенні 2/3 (π_{12}=0,66). З погіршенням погодних умов частка втрат на корону в сумарних втратах має зменшуватися, а навантажувальних – зростати. За граничних умов (туман, ожеледь, α_{11}=8) π_{12}=0,25. Тобто оптимальним буде такий режим ЛЕП, коли втрати на корону будуть в чотири рази менші за навантажувальні втрати. На рис. 1 наведена залежність між оптимальним відношенням втрат на корону і навантажувальними втратами в залежності від коефіцієнта α_{11} або, що те саме, від погодних умов, в яких експлуатується ЛЕП. Ця залежність може використовуватися для оптимального керування рівнями напруги ЛЕП, а також, якщо це допустимо, перетоками потужності в ній.

Висновки

1. За наявності параметричної подібності в досліджуваному процесі подібність може бути встановлена у вигляді відношення відповідних критеріїв подібності – вторинних критеріїв подібності. Значення вторинних критеріїв подібності може бути визначене з аналізу матриці показників степені (розмірностей).

2. Індикатори подібності в загальному випадку не дозволяють виявити параметричну подібність в досліджуваному процесі. Вони дозволяють встановити і досягти адекватності процесів в оригіналі та в його моделі. Для цього також достатньо інформації, яка міститься в матриці показників степені (розмірностей) параметрів, що характеризують процес.

3. За допомогою вторинних критеріїв та індикаторів подібності можуть успішно розв'язуватися певні технічні задачі. Це насамперед оптимізаційні задачі, в яких можливо і доцільно використовувати стійкі співвідношення між оптимальними значеннями параметрів. До таких задач в електроенергетиці відносяться, наприклад, задачі проектування ліній

електропередачі, оптимізація режимів роботи ліній надвисоких напруг, оптимального керування нормальними режимами електричних мереж, тощо.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Веников В. А. Теория подобия и моделирования. – М.: Высшая школа, 1976. – 479 с.

2. Электрические системы. Кибернетика электрических систем. – Под ред. В. А. Веникова. – М.: Высшая школа, 1974. – 328 с.

3. Лежнюк П. Д., Собчук Н. В., Казьмірук О. І. Вторинні критерії та індикатори подібності в задачах моделювання оптимальних режимів ЕЕС // Вісник НУ “Львівська політехніка”. Вип. 597. “Електроенергетичні та електромеханічні системи”.– 2007. – С. 152–157.

4. Астахов Ю. Н., Лежнюк П. Д. Применение критериального метода в электроэнергетике. – Киев: УМК ВО, 1989. – 140 с.

5. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 280 с.

6. Астахов Ю. Н., Лежнюк П. Д. Применение теории подобия в задачах управления нормальными режимами электроэнергетических систем // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1990. – № 5. – С. 3–11.

7. Александров Г. Н. Установки сверхвысокого напряжения и охрана окружающей среды. – Л.: Энергоатомиздат, 1989. – 360 с.

Лежнюк Петро Дем’янович – д. т. н., професор, завідувач кафедри електричних станцій та систем.

Вінницький національний технічний університет.

Олег Юрійович Петрушенко – пошукач кафедри електричних станцій та систем.

Вінницький національний технічний університет.

Жан-П’єр Нгома – к. т. н., доцент кафедри електротехніки.

Університет Дуала, Камерун.