

УДК 681.5.015+62-83:629.433

**О. Б. Мокін, к. т. н., доц.; Б. І. Мокін, д. т. н., проф.****ОСОБЛИВОСТІ МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ ЕЛЕКТРИЧНИХ  
ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ З УРАХУВАННЯМ ЗАЛЕЖНОСТІ  
НАВАНТАЖЕННЯ ВІД РЕЛЬЄФУ МІСЦЕВОСТІ**

*Показано, чому відомі методи оптимізації руху електричних транспортних засобів з навантаженням, яке залежить від рельєфу місцевості, де прокладено залізничну колію, не можуть бути застосованими для розв'язання конкретних практичних задач. Запропоновано підхід до моделювання таких транспортних засобів, придатний для розв'язання практичних задач оптимізації їх руху.*

**Ключові слова:** *моделювання, оптимізація, електротранспорт, залізнична колія, рельєф місцевості.*

**Постановка завдання й вихідні передумови**

Оптимізаційні задачі для транспортних засобів, що рухаються протягом значимих відрізків часу, завжди доводиться розв'язувати в умовах залежності траєкторії руху від рельєфу місцевості. На рис. 1 показана одна із можливих траєкторій такого руху від точки  $A$ , з якої транспортний засіб розпочинає рух у момент часу  $t_A$ , до точки  $B$ , в яку цей засіб прибуває за графіком у момент часу  $t_B$ . На цьому рисунку показані також проєкції траєкторії руху на координатні площини  $xOy$  та  $xOz$ . Із рисунка видно, що від точки  $A$  до точки  $C$  маємо спуск по прямій лінії, від точки  $C$  до точки  $D$  маємо закруглення колії в горизонтальній площині, від точки  $D$  до точки  $M$  – підйом по прямій лінії, від точки  $M$  до точки  $N$  знову маємо закруглення колії в горизонтальній площині, а від точки  $N$  до точки  $B$  продовжуємо рух в горизонтальній площині, але по прямій.

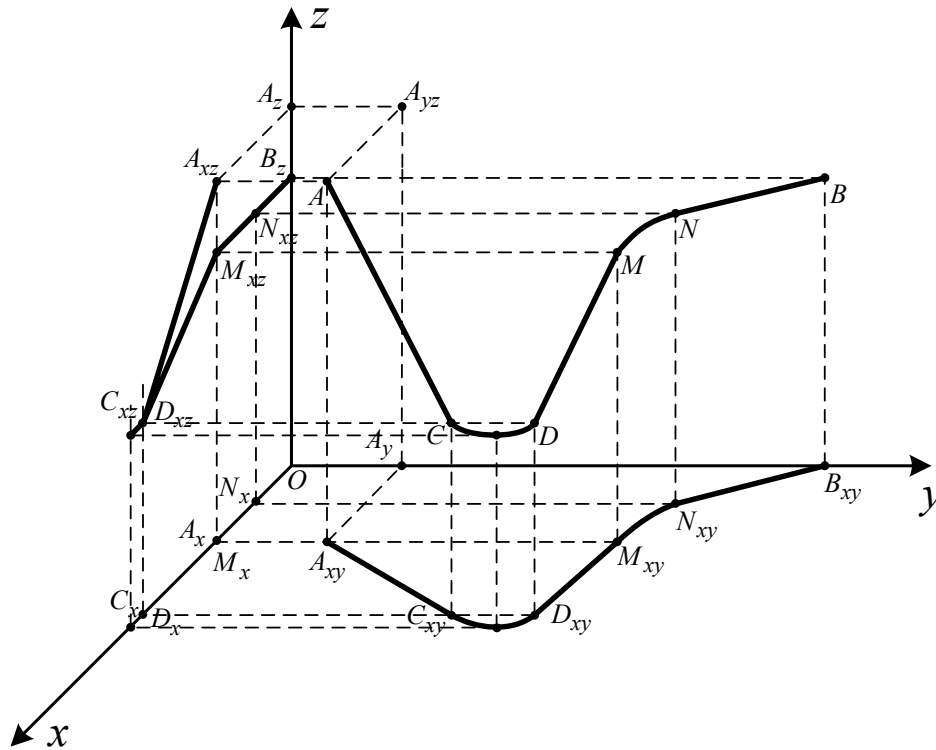


Рис. 1. Приклад траєкторії руху транспортного засобу по колії на місцевості зі складним рельєфом

У ряді робіт, наприклад [1], розкрито підхід до розв'язання цього класу оптимізаційних задач з використанням математичної моделі руху транспортного засобу у формі другого закону Ньютона, тобто у формі

$$m \frac{d^2 l(t)}{dt^2} = F_T(t) - F_{\Gamma}(l, t), \quad (1)$$

де  $m$  — маса транспортного засобу,  $l(t)$  — довжина шляху, пройденого транспортним засобом від початку руху, яка залежить від часу  $t$ , а  $F_T(t)$ ,  $F_{\Gamma}(t)$  — відповідно, сила тяги транспортного засобу та гальмівна сила, що діє на транспортний засіб під час руху.

Однак, як ми з'ясували, намагаючись використати цей підхід для розв'язання конкретної оптимізаційної задачі, він не є дієвим, оскільки, по-перше, гальмівна сила не є константою навіть під час руху по горизонтальній площині, адже лобовий і дотичний опір повітря залежать від швидкості  $v(t)$  руху транспортного засобу, тобто

$$F_{\Gamma}(l, t) = \mu_0(l, t) + \mu_1(l, t) \cdot v(l, t) + \mu_2(l, t) \cdot (v(l, t))^2, \quad (2)$$

по-друге, значення гальмівної сили залежать також і від того, рухається транспортний засіб по горизонтальній площині чи долає підйом або спуск, а по-третє, пройдений шлях за наявності підйомів, спусків і поворотів стає функцією декартових координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (рис. 1), що при апроксимації їх функціями часу виду

$$\begin{cases} x(t) = x_a f_x(t), \\ y(t) = y_a f_y(t), \\ z(t) = z_a f_z(t) \end{cases} \quad (3)$$

приводить до появи у виразах, якими моделюється пройдений шлях, нелінійної залежності від їхніх похідних, оскільки

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{\left(x_a \frac{df_x}{dt}\right)^2 + \left(y_a \frac{df_y}{dt}\right)^2 + \left(z_a \frac{df_z}{dt}\right)^2} dt, \quad (4)$$

$$l(t) = \int_{t_A}^t \sqrt{\left(x_a \frac{df_x}{d\tau}\right)^2 + \left(y_a \frac{df_y}{d\tau}\right)^2 + \left(z_a \frac{df_z}{d\tau}\right)^2} d\tau, \quad (5)$$

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = \frac{x_a^2 \frac{df_x}{dt} \cdot \frac{d^2 f_x}{dt^2} + y_a^2 \frac{df_y}{dt} \cdot \frac{d^2 f_y}{dt^2} + z_a^2 \frac{df_z}{dt} \cdot \frac{d^2 f_z}{dt^2}}{\sqrt{\left(x_a \frac{df_x}{dt}\right)^2 + \left(y_a \frac{df_y}{dt}\right)^2 + \left(z_a \frac{df_z}{dt}\right)^2}}. \quad (6)$$

Цілком очевидно, що оптимізацію руху за критерієм мінімуму витрат електроенергії  $E$  електровозом, на електропривод якого подається з контактної мережі напруга  $u(t)$ , яка створює струм  $i(t)$ , тобто за критерієм мінімуму виразу

$$E = \int_{t_A}^{t_B} u(t)i(t)dt, \quad (7)$$

запропонованим у роботі [2], за умови виконання програми руху між зупинками в точках  $A$  і  $B$  (рис. 1)

$$l_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} v(x, y, z, t)dt \quad (8)$$

та обмеження (1), в якому використовуються співвідношення (2)–(6), неможливо здійснити так, щоб можна було побудувати аналітичну математичну модель для струму  $i(t)$  електропривода електровоза, який забезпечує мінімум критерію (7) при виконанні програми (8). Неможливо побудувати єдину аналітичну модель для цього струму і в разі використання моделей динаміки електропотяга у вигляді, наведеному в роботах [3, 4]. Тож пошуку такого підходу, який дозволяє вищезазначену аналітичну математичну модель побудувати, і присвячена ця стаття.

### Розв'язання поставленої задачі

Із відомчих методик прокладання залізничної колії на поверхні зі складним рельєфом відомо, що колійники зобов'язані прокладати закруглення колії на горизонтальних ділянках земної поверхні, а спуски і підйоми виконувати прямолінійними. А правила експлуатації колійних транспортних засобів вимагають закруглення колії проходити зі сталою швидкістю, значення якої забезпечує несходження жодного із вагонів з колії і їх неперевертання. Тож, спираючись на ці методики й правила, можна стверджувати, що доцільною є декомпозиція задачі оптимізації руху колійного транспортного засобу по поверхні зі складним рельєфом на сукупність підзадач оптимізації руху цього засобу на прямолінійних горизонтальних ділянках (відрізок  $NB$  на рис. 1), на закругленнях у горизонтальній площині (дуги  $MN$  та  $CD$  на рис. 1), на прямолінійних підйомах (відрізок  $DM$  на рис. 1) та прямолінійних спусках (відрізок  $AC$  на рис. 1), накладаючи при цьому умови однаковості тих значень параметрів руху в точках стику означених відрізків і дуг, які забезпечують не лише гладкість траєкторії руху від стартової (точка  $A$  на рис. 1) до кінцевої (точка  $B$  на рис. 1) станцій, але й гладкість кривих, які віддзеркалюють графік швидкості руху транспортного засобу від точки  $A$  до точки  $B$ , оскільки відчутні лінійні розміри транспортного засобу та наявність як мінімум

двох пар коліс унеможливають появу точок злому на неперервній траєкторії його руху, а відчутна маса унеможливає стрибкоподібну зміну його швидкості.

Відомо, що гладкою називається неперервна функція з неперервною першою похідною. Тож траєкторія руху транспортного засобу буде гладкою функцією лише в тому разі, коли її перша похідна, тобто швидкість руху являтиме собою неперервну функцію. У свою чергу швидкість руху транспортного засобу буде гладкою функцією лише в тому разі, коли її перша похідна, тобто прискорення, теж являтиме собою неперервну функцію.

Тож для наведеної на рис. 1 траєкторії руху від точки  $A$  до точки  $B$  умовою її гладкості буде виконання співвідношень:

$$\begin{cases} v_{AC}(C) = v_{CD}(C); \\ v_{CD}(D) = v_{DM}(D); \\ v_{DM}(M) = v_{MN}(M); \\ v_{MN}(N) = v_{NB}(N), \end{cases} \quad (9)$$

в яких подвійний нижній індекс біля символу швидкості вказує на те, якою ділянкою траєкторії транспортний засіб наближається до точки, вказаної в дужках, а умовою гладкості швидкості руху транспортного засобу по цій траєкторії буде виконання співвідношень:

$$\begin{cases} \frac{dv_{AC}}{dt}(C) = \frac{dv_{CD}}{dt}(C); \\ \frac{dv_{CD}}{dt}(D) = \frac{dv_{DM}}{dt}(D); \\ \frac{dv_{DM}}{dt}(M) = \frac{dv_{MN}}{dt}(M); \\ \frac{dv_{MN}}{dt}(N) = \frac{dv_{NB}}{dt}(N), \end{cases} \quad (10)$$

в яких має місце та ж символіка, але щодо похідних швидкості.

Оскільки для однозначності визначення траєкторії руху необхідно задавати її значення на границях ділянки руху, то співвідношення (9), (10) необхідно доповнити співвідношеннями:

$$\begin{cases} v(A) = v_A; \\ v_{NB}(B) = v_B \end{cases} \quad (11)$$

— для швидкостей, в яких  $v_A, v_B$  їхні конкретизовані числові значення, та співвідношеннями:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt}(A) = v_A^1; \\ \frac{dv_{NB}}{dt}(B) = v_B^1 \end{cases} \quad (12)$$

— для прискорень, в яких  $v_A^1, v_B^1$  також їхні конкретизовані числові значення.

Для уніфікації подальших розмірковувань конкретизуємо місця розміщення точок  $A$  і  $B$ . Для наземних залізничних електропотягів ці точки зручно розташовувати в місцях установки semaforів, причому точку  $A$  розташовуватимемо на вихідному semaфорі startової станції, а відлік часу  $t_A$  розпочинатимемо в момент проходження semaфора хвостом останнього вагона електропотягу, а точку  $B$  розташовуватимемо на вхідному semaфорі кінцевої станції, а відлік часу  $t_B$  розпочинатимемо в момент досягнення semaфора лобовою частиною тягового електровоза. Щодо підземних електропотягів метрополітенів і наземних міських трамваїв, то точку  $A$  для них будемо прив'язувати до вихідного зрізу startової посадочної платформи і відлік часу  $t_A$  розпочинатимемо з моменту проходження вихідного зрізу startової

посадочної платформи хвостом останнього вагона, а точку  $B$  будемо прив'язувати до вхідного зрізу кінцевої посадочної платформи і відлік часу  $t_B$  розпочинатимемо з моменту досягнення вхідного зрізу кінцевої посадочної платформи лобовою частиною першого вагона.

Із викладеного вище випливає, що задачу оптимізації руху електропотяга від стартової станції до кінцевої, сформульовану для загального випадку траєкторії руху, представленого на рис. 1, доцільно розв'язувати шляхом оптимізації руху на окремих ділянках колії ( $AC, CD, DM, MN, NB$ ) за умови виконання обмежень (9) – (12). І починати розв'язання цієї задачі потрібно з оптимізації руху на закругленнях ( $CD, MN$ ), виходячи з того, що основним критерієм оптимальності під час руху електричного транспортного засобу по закругленню колії, прокладеній на горизонтальній площині, є запас несходження, який забезпечується неперевищенням цим транспортним засобом допустимого значення швидкості руху, яке визначається з умов сходження з колії вагона з найвище розміщеним нечітко визначеним центром маси. Тож на цьому етапі з урахуванням ще й того, що закруглення електричні транспортні засоби проходять з постійною швидкістю, ми знаходимо конкретні значення обмежень (9), (10), причому цілком очевидно, що швидкості у визначених точках будуть константами, а прискорення – нульовими.

Другим етапом розв'язання поставленої задачі є визначення обмежень (11), (12). При цьому необхідно враховувати те, що швидкість і прискорення електричного транспортного засобу на семафорі стартової станції задаються її технологічними службами, а швидкість і прискорення цього ж транспортного засобу на семафорі кінцевої станції знаходяться із рівнянь динаміки за умови його зупинки на визначеному відрізку посадочної платформи.

На третьому етапі розв'язується задача оптимізації руху електричного транспортного засобу по прямолінійному відрізку колії ( $NB$ ), прокладеному на горизонтальній площині. При цьому замість обмежень (1), (2), (8) уже можна використовувати простіші:

$$m \frac{d v(t)}{dt} = F_T(t) - F_T(v, t), \quad (13)$$

$$F_T(v, t) = \mu_0 + \mu_1 v(t) + \mu_2 (v(t))^2, \quad (14)$$

$$l_{NB} = \int_{t_N}^{t_B} v(t) dt. \quad (15)$$

На четвертому етапі розв'язується задача оптимізації руху електричного транспортного засобу під час його спуску (прямолінійний відрізок колії  $AC$ ) та під час його підйому (прямолінійний відрізок колії  $DM$ ).

При цьому, що стосується тягової та гальмівної сил в моделях (13), (14), потрібно врахувати усі ті особливості, які розкриті стосовно них в роботі [4], а обмеження (15) сформулювати у вигляді

$$l_{AC} = \int_{t_A}^{t_C} v(x_A, x_C, y_A, y_C, z_A, z_C, t) dt, \quad (16)$$

$$l_{DM} = \int_{t_D}^{t_M} v(x_D, x_M, y_D, y_M, z_D, z_M, t) dt, \quad (17)$$

де декартові координати кінцевих точок задають довжину відповідного відрізка колії в просторі.

### Висновки

1. Показано, чому відомі методи оптимізації руху електричних транспортних засобів з навантаженням, яке залежить від рельєфу місцевості, де прокладено залізничну колію, не можуть бути застосованими для розв'язання конкретних практичних задач.

2. Запропоновано підхід до моделювання руху електричних транспортних засобів, придатний для розв'язання практичних задач оптимізації руху, який ґрунтується на декомпозиції задачі оптимізації руху вздовж усієї траєкторії на сукупність підзадач оптимізації руху на відрізках, обмежених точками зміни режиму.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Петров Ю. П. Оптимальное управление движением транспортных средств / Ю. П. Петров. – Л.: Энергия, 1969. – 96 с.

2. Математичні моделі руху транспортних засобів, оптимальні за критерієм мінімуму витрат енергії, з урахуванням рельєфу / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2007. – № 3. – С. 28 – 33.

3. Математичні моделі багатомасових розподілених динамічних систем для задач оптимізації (частина 1) / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2008. – № 6. – С. 55 – 58.

4. Математичні моделі багатомасових розподілених динамічних систем для задач оптимізації (частина 2) / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2009. – № 1. – С. 28 – 33.

**Мокін Олександр Борисович** – к. т. н., доцент кафедри електромеханічних систем автоматизації в промисловості і на транспорті, докторант кафедри, e-mail: [abmokin@gmail.com](mailto:abmokin@gmail.com).

**Мокін Борис Іванович** – д. т. н., професор кафедри електромеханічних систем автоматизації в промисловості і на транспорті, ректор ВНТУ, тел.: (0432) 56-08-48.

Вінницький національний технічний університет.