УДК 518.5

**А. П. Мотайло; А. Н. Хомченко, д. ф.-м. н., проф.**

# АЛГЕБРАЇЧНА ПОБУДОВА ПОЛІНОМІАЛЬНОГО БАЗИСА ШЕСТИВУЗЛОВОГО ОКТАЕДРА

*У роботі засобами матричного числення побудовано поліноміальні базиси другого степеня для скінченого елемента у вигляді октаедра. Отримані функції є гармонічними по Лапласу. Проаналізовано геометричні властивості відповідних поверхонь рівня.*

***Ключові слова:*** *шестивузловий октаедр, базис, поверхні рівня.*

## Вступ

При чисельному рішенні задач методом дискретних елементів широко використовують тетраедри та гексаедри. Останнім часом у просторових решітках стали використовувати октаедри в поєднанні з тетраедрами. Як наслідок, виникла необхідність оснащення октаедра як скінченого елемента власною системою базисних функцій.

## Аналіз попередніх публікацій, ціль статті

Задача побудови базису семивузлового октаедра, вузли якого розташовані в його вершинах та барицентрі, розв’язана в роботах [1, 2]. Автори [1] пропонують кусочно-лінійний базис октаедра, не вдаючись у подробиці його побудови, і застосовують його для апроксимації аналітичних функцій у задачах об'ємної візуалізації. Автор [2] будує квадратичний базис, використовуючи тейлоровські розкладання функції трьох незалежних змінних у поєднанні з кінцево-різницевими схемами. При цьому конструкцію з гексаедра і вписаного в нього октаедра використовують для розв’язання задач про безвихрові течії ідеальних рідин у 3D. У деяких задачах центральний вузол не потрібний, наприклад, в узагальненій задачі Діріхле для рівняння Лапласа на октаедрі з дискретно заданими умовами на границі. Тому виникла ідея побудови базису октаедра з шістьма вузлами. Перші результати в цьому напрямку представлені в роботі [3]. Два базиси шестивузлової моделі октаедра (кусочно-лінійний і квадратичний) отримані з відповідних базисів семивузлової моделі за допомогою процедури конденсації.

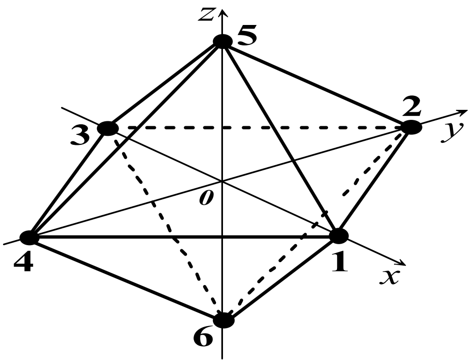
**Мета статті** – засобами матричного числення побудувати шестивузловий поліноміальний базис (базиси) октаедра та дослідити його геометричні властивості.

## Основна частина

Розглянемо октаедр, центр якого розташований на початку системи координат Oxyz, а вершини (вузли) є точками дотику октаедра описаної сфери одиничного радіуса. Координатні осі направлені так, як показано на рис. 1. Припустимо, що в кожній точці октаедра визначена деяка фізична величина (наприклад, температура), причому значення функції $\Phi(x, y, z)$ у вузлах октаедра відомі і рівні постійним $\Phi_i \left(i = \overline{1,6}\right)$. Сформулюємо задачу: знайти базисні функції $N_i$, $i = \overline{1,6}$, що задовольняють умовам:

$$N_i(x_k, y_k, z_k) = \delta_{ik}, \quad i,k = \overline{1,6}, \qquad \sum_{i=1}^{6} N_i = 1, \tag{1}$$

де $\delta_{i,k}$ – символ Кронекера, $i$ – номер функції, $k$ – номер вузла.




$$1-|x|-|y|-|z|\geq 0.$$

Рис. 1. Октаедр з 6-ма вузлами інтерполяції

Складемо інтерполяційний поліном для функції $\Phi(x,y,z)$ у вигляді повного поліному 2-го степеня:

$$\Phi=\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3y+\alpha_4z+\alpha_5x^2+\alpha_6y^2+\alpha_7z^2+\alpha_8xy+\alpha_9yz+\alpha_{10}xz\ . \tag{2}$$

Згідно інтерполяційній формулі Лагранжа значення функції $\Phi$ у довільній внутрішній точці октаедра виражається формулою:

$$\Phi=\sum_{i=1}^{6}N_i\Phi_i, \tag{3}$$

де $N_i(x,y,z)$ – поліноміальні базисні функції типу Лагранжа. З умов (1), (3) ясно, що в центрі октаедра значення інтерполяційного поліному $\Phi(0,0,0)=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\Phi_i$. Остання рівність дозволяє визначити вільний коефіцієнт $\alpha_1$ формули (2) як $\alpha_1=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\Phi_i$ . Решта дев’ять невідомих $\alpha_i\left(i=\overline{2,10}\right)$ знайдемо із системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases}\Phi_{1,3}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\Phi_i\pm\alpha_2+\alpha_5+0\cdot\alpha_8+0\cdot\alpha_9+0\cdot\alpha_{10};\\ \Phi_{2,4}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\Phi_i\pm\alpha_3+\alpha_6+0\cdot\alpha_8+0\cdot\alpha_9+0\cdot\alpha_{10};\\ \Phi_{5,6}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\Phi_i\pm\alpha_4+\alpha_7+0\cdot\alpha_8+0\cdot\alpha_9+0\cdot\alpha_{10}.\end{cases} \tag{4}$$

Досліджуючи систему (4) на сумісність, приходимо до висновку, що ця система є невизначеною. Причому невідомі $\alpha_i\left(i=\overline{2,7}\right)$ визначаються однозначно системою рівностей:

$$\begin{cases} \alpha_2 = \frac{1}{2}\Phi_1 - \frac{1}{2}\Phi_3; \\ \alpha_3 = \frac{1}{2}\Phi_2 - \frac{1}{2}\Phi_4; \\ \alpha_4 = \frac{1}{2}\Phi_5 - \frac{1}{2}\Phi_6; \\ \alpha_5 = \frac{1}{2}\Phi_1 + \frac{1}{2}\Phi_3 - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\Phi_i; \\ \alpha_6 = \frac{1}{2}\Phi_2 + \frac{1}{2}\Phi_4 - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\Phi_i; \\ \alpha_7 = \frac{1}{2}\Phi_5 + \frac{1}{2}\Phi_6 - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\Phi_i. \end{cases} \tag{5}$$

А невідомі $\alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}$ можуть приймати довільні дійсні значення. Таким чином, інтерполяційний поліном (2) можна представити у вигляді:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{6} N_i^0(x, y, z)\Phi_i + \alpha_8 xy + \alpha_9 yz + \alpha_{10} xz, \tag{6}$$

де функції $N_i^0\left(i = \overline{1,6}\right)$ визначаються так:

$$\begin{aligned} N_{1,3}^0 &= \frac{1}{6} \pm \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{6}z^2; \\ N_{2,4}^0 &= \frac{1}{6} \pm \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}y^2 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}z^2; \\ N_{5,6}^0 &= \frac{1}{6} \pm \frac{1}{2}z + \frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}y^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Оскільки рівність $\alpha_8 xy + \alpha_9 yz + \alpha_{10} xz = 0$ справедлива в довільному вузлі $i$ октаедра і не залежить від коефіцієнтів $\alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}$, то, вважаючи $\alpha_j = \sum_{i=1}^{6}\alpha_j^{(i)}\Phi_i$ $(j = 8, 9, 10)$, де $\alpha_j^{(i)}\left(i = \overline{1,6}\right)$ – довільні дійсні числа, інтерполяційний поліном (6) можна представити у вигляді (3), де

$$\begin{aligned} N_{1,3} &= N_{1,3}^0 + \alpha_8^{(1),(3)} xy + \alpha_9^{(1),(3)} yz + \alpha_{10}^{(1),(3)} xz; \\ N_{2,4} &= N_{2,4}^0 + \alpha_8^{(2),(4)} xy + \alpha_9^{(2),(4)} yz + \alpha_{10}^{(2),(4)} xz; \\ N_{5,6} &= N_{5,6}^0 + \alpha_8^{(5),(6)} xy + \alpha_9^{(5),(6)} yz + \alpha_{10}^{(5),(6)} xz. \end{aligned} \tag{8}$$

Перевірка умови $\sum_{i=1}^{6} N_i = 1$, показує, що рівність

$$\sum_{i=1}^{6}\left(\alpha_8^{(i)} xy + \alpha_9^{(i)} yz + \alpha_{10}^{(i)} xz\right) = 0 \tag{9}$$

виконується в довільній внутрішній точці $(x, y, z)$ октаедра. А це можливо, якщо

$$\sum_{i=1}^{6}\alpha_8^{(i)} = \sum_{i=1}^{6}\alpha_9^{(i)} = \sum_{i=1}^{6}\alpha_{10}^{(i)} = 0. \tag{10}$$

Отримані функції (8) є гармонічними по Лапласу і співпадають із квадратичним базисом шестивузлового октаедра [3] для $\alpha_8^{(i)} = \alpha_9^{(i)} = \alpha_{10}^{(i)} = 0,\ i = \overline{1,6}$.

Враховуючи геометричну ізотропію октаедра, в залежності від виду симетрії можна запропонувати різні способи вибору коефіцієнтів $\alpha_8^{(i)}, \alpha_9^{(i)}, \alpha_{10}^{(i)}, i = \overline{1,6}$ базисних функцій як для вузлів, розташованих на одній координатній осі, так і для вузлів, розміщених по одному на різних координатних осях. Якщо при конструюванні функцій форми для протилежних вузлів октаедра застосувати дзеркальну, осьову та центральну симетрії, отримаємо 4 правила:

Таблиця 1

| | |
|---|---|
| (I): $\begin{cases} N_3(x,y,z) = N_1(-x,y,z); \\ N_4(x,y,z) = N_2(x,-y,z); \\ N_6(x,y,z) = N_5(x,y,-z). \end{cases}$ | (II): $\begin{cases} N_3(x,y,z) = N_1(-x,-y,z); \\ N_4(x,y,z) = N_2(x,-y,-z); \\ N_6(x,y,z) = N_5(-x,y,-z). \end{cases}$ |
| (III): $\begin{cases} N_3(x,y,z) = N_1(-x,y,-z); \\ N_4(x,y,z) = N_2(-x,-y,z); \\ N_6(x,y,z) = N_5(x,-y,-z). \end{cases}$ | (IV): $\begin{cases} N_3(x,y,z) = N_1(-x,-y,-z); \\ N_4(x,y,z) = N_2(-x,-y,-z); \\ N_6(x,y,z) = N_5(-x,-y,-z). \end{cases}$ |

Для сусідніх вузлів, що належать одній (довільній) із граней октаедра, існує 4 різних варіанти перестановок координат при переході від однієї функції до іншої, здійснюваних шляхом афінних перетворень системи Oxyz, а саме:

Таблиця 2

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1: $(x,y,z) \to (y,z,x)$ | 2: $(x,y,z) \to (-y,z,x)$ | 3: $(x,y,z) \to (y,-z,x)$ | 4: $(x,y,z) \to (y,z,-x)$ |

Легко побачити, що при довільному наборі правил (по одному із таблиць 1 і 2) кількість вільних коефіцієнтів $\alpha_8^{(i)}, \alpha_9^{(i)}, \alpha_{10}^{(i)}, i = \overline{1,6}$ можна скоротити до трьох $\beta_i, i = \overline{1,3}$, де $\beta_1 = \alpha_8^{(1)}, \beta_2 = \alpha_9^{(1)}, \beta_3 = \alpha_{10}^{(1)}$.

У таблиці 3 представлено шестивузлові поліноміальні базиси октаедра, отримані комбінуванням правил із таблиць 1 і 2:

Таблиця 3

| Конфігура-ція правил | Базисні функції | Обмеження для $\beta_i, i = \overline{1,3}$ | № формули |
|---|---|---|---|
| (I,1) | $N_{1,3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x^2 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{6}z^2 \pm \beta_1 xy \pm \beta_2 yz \pm \beta_3 xz;$<br>$N_{2,4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}y^2 \pm \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{6}x^2 \pm \beta_3 xy \pm \beta_1 yz \pm \beta_2 xz;$<br>$N_{5,6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}z^2 \pm \frac{1}{2}z - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}y^2 \pm \beta_2 xy \pm \beta_3 yz \pm \beta_1 xz.$ | $\beta_i \in R$ | (11) |
| (I,2) | $N_{1,3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x^2 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{6}z^2 \pm \beta_1 xy \pm \beta_2 yz \pm \beta_3 xz;$<br>$N_{2,4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}y^2 \pm \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{6}x^2 \mp \beta_3 xy \mp \beta_1 yz \pm \beta_2 xz;$<br>$N_{5,6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}z^2 \pm \frac{1}{2}z - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}y^2 \mp \beta_2 xy \pm \beta_3 yz \mp \beta_1 xz.$ | $\beta_i \in R$ | (12) |
| (I,3) | $N_{1,3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x^2 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{6}z^2 \pm \beta_1 xy \pm \beta_2 yz \pm \beta_3 xz;$ | $\beta_i \in R$ | (13) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $N_{2,4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}y^2\pm\frac{1}{2}y-\frac{1}{6}z^2-\frac{1}{6}x^2\pm\beta_3xy\mp\beta_1yz\mp\beta_2xz;$<br>$N_{5,6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}z^2\pm\frac{1}{2}z-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}y^2\mp\beta_2xy\mp\beta_3yz\pm\beta_1xz.$ | | |
| (I,4) | $N_{1,3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}x^2\pm\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}y^2-\frac{1}{6}z^2\pm\beta_1xy\pm\beta_2yz\pm\beta_3xz;$<br>$N_{2,4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}y^2\pm\frac{1}{2}y-\frac{1}{6}z^2-\frac{1}{6}x^2\mp\beta_3xy\pm\beta_1yz\mp\beta_2xz;$<br>$N_{5,6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}z^2\pm\frac{1}{2}z-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}y^2\pm\beta_2xy\mp\beta_3yz\mp\beta_1xz.$ | $\beta_i\in R$ | (14) |
| (II,1) | $N_{1,3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}x^2\pm\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}y^2-\frac{1}{6}z^2\pm\beta_2yz\pm\beta_3xz;$<br>$N_{2,4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}y^2\pm\frac{1}{2}y-\frac{1}{6}z^2-\frac{1}{6}x^2\pm\beta_3xy\pm\beta_2xz;$<br>$N_{5,6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}z^2\pm\frac{1}{2}z-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}y^2\pm\beta_2xy\pm\beta_3yz.$ | $\beta_1=0,$<br>$\beta_2,\beta_3\in R$ | (15) |
| (II,2) | $N_{1,3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}x^2\pm\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}y^2-\frac{1}{6}z^2\pm\beta_2yz\pm\beta_3xz;$<br>$N_{2,4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}y^2\pm\frac{1}{2}y-\frac{1}{6}z^2-\frac{1}{6}x^2\mp\beta_3xy\pm\beta_2xz;$<br>$N_{5,6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}z^2\pm\frac{1}{2}z-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}y^2\mp\beta_2xy\pm\beta_3yz.$ | $\beta_1=0,$<br>$\beta_2,\beta_3\in R$ | (16) |
| (II,3) | $N_{1,3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}x^2\pm\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}y^2-\frac{1}{6}z^2\pm\beta_2yz\pm\beta_3xz;$<br>$N_{2,4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}y^2\pm\frac{1}{2}y-\frac{1}{6}z^2-\frac{1}{6}x^2\pm\beta_3xy\mp\beta_2xz;$<br>$N_{5,6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}z^2\pm\frac{1}{2}z-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}y^2\mp\beta_2xy\mp\beta_3yz.$ | $\beta_1=0,$<br>$\beta_2,\beta_3\in R$ | (17) |
| (II,4) | $N_{1,3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}x^2\pm\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}y^2-\frac{1}{6}z^2\pm\beta_2yz\pm\beta_3xz;$<br>$N_{2,4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}y^2\pm\frac{1}{2}y-\frac{1}{6}z^2-\frac{1}{6}x^2\mp\beta_3xy\mp\beta_2xz;$<br>$N_{5,6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}z^2\pm\frac{1}{2}z-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}y^2\pm\beta_2xy\mp\beta_3yz.$ | $\beta_1=0,$<br>$\beta_2,\beta_3\in R$ | (18) |
| (III,1) | $N_{1,3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}x^2\pm\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}y^2-\frac{1}{6}z^2\pm\beta_1xy\pm\beta_2yz;$<br>$N_{2,4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}y^2\pm\frac{1}{2}y-\frac{1}{6}z^2-\frac{1}{6}x^2\pm\beta_1yz\pm\beta_2xz;$<br>$N_{5,6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}z^2\pm\frac{1}{2}z-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}y^2\pm\beta_2xy\pm\beta_1xz.$ | $\beta_3=0,$<br>$\beta_1,\beta_2\in R$ | (19) |
| (III,2) | $N_{1,3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}x^2\pm\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}y^2-\frac{1}{6}z^2\pm\beta_1xy\pm\beta_2yz;$<br>$N_{2,4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}y^2\pm\frac{1}{2}y-\frac{1}{6}z^2-\frac{1}{6}x^2\mp\beta_1yz\pm\beta_2xz;$<br>$N_{5,6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}z^2\pm\frac{1}{2}z-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}y^2\mp\beta_2xy\mp\beta_1xz.$ | $\beta_3=0,$<br>$\beta_1,\beta_2\in R$ | (20) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| (III,3) | $N_{1,3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}x^2\pm\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}y^2-\frac{1}{6}z^2\pm\beta_1xy\pm\beta_2yz;$<br>$N_{2,4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}y^2\pm\frac{1}{2}y-\frac{1}{6}z^2-\frac{1}{6}x^2\mp\beta_1yz\mp\beta_2xz;$<br>$N_{5,6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}z^2\pm\frac{1}{2}z-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}y^2\mp\beta_2xy\pm\beta_1xz.$ | $\beta_3=0,$<br>$\beta_1,\beta_2\in R$ | (21) |
| (III,4) | $N_{1,3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}x^2\pm\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}y^2-\frac{1}{6}z^2\pm\beta_1xy\pm\beta_2yz;$<br>$N_{2,4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}y^2\pm\frac{1}{2}y-\frac{1}{6}z^2-\frac{1}{6}x^2\pm\beta_1yz\mp\beta_2xz;$<br>$N_{5,6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}z^2\pm\frac{1}{2}z-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}y^2\pm\beta_2xy\mp\beta_1xz.$ | $\beta_3=0,$<br>$\beta_1,\beta_2\in R$ | (22) |
| (IV,1) | $N_{1,3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}x^2\pm\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}y^2-\frac{1}{6}z^2+\beta_1xy+\beta_2yz+\beta_3xz;$<br>$N_{2,4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}y^2\pm\frac{1}{2}y-\frac{1}{6}z^2-\frac{1}{6}x^2+\beta_3xy+\beta_1yz+\beta_2xz;$<br>$N_{5,6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}z^2\pm\frac{1}{2}z-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}y^2+\beta_2xy+\beta_3yz+\beta_1xz.$ | $\beta_1+\beta_2+\beta_3=0,$<br>$\beta_i\in R$ | (23) |
| (IV,2) | $N_{1,3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}x^2\pm\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}y^2-\frac{1}{6}z^2+\beta_1xy+\beta_2yz+\beta_3xz;$<br>$N_{2,4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}y^2\pm\frac{1}{2}y-\frac{1}{6}z^2-\frac{1}{6}x^2-\beta_3xy-\beta_1yz+\beta_2xz;$<br>$N_{5,6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}z^2\pm\frac{1}{2}z-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}y^2-\beta_2xy+\beta_3yz-\beta_1xz.$ | $\beta_1-\beta_2-\beta_3=0,$<br>$\beta_i\in R$ | (24) |
| (IV,3) | $N_{1,3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}x^2\pm\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}y^2-\frac{1}{6}z^2+\beta_1xy+\beta_2yz+\beta_3xz;$<br>$N_{2,4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}y^2\pm\frac{1}{2}y-\frac{1}{6}z^2-\frac{1}{6}x^2+\beta_3xy-\beta_1yz-\beta_2xz;$<br>$N_{5,6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}z^2\pm\frac{1}{2}z-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}y^2-\beta_2xy-\beta_3yz+\beta_1xz.$ | $\beta_1-\beta_2+\beta_3=0,$<br>$\beta_i\in R$ | (25) |
| (IV,4) | $N_{1,3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}x^2\pm\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}y^2-\frac{1}{6}z^2+\beta_1xy+\beta_2yz+\beta_3xz;$<br>$N_{2,4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}y^2\pm\frac{1}{2}y-\frac{1}{6}z^2-\frac{1}{6}x^2-\beta_3xy+\beta_1yz-\beta_2xz;$<br>$N_{5,6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}z^2\pm\frac{1}{2}z-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}y^2+\beta_2xy-\beta_3yz-\beta_1xz.$ | $\beta_1+\beta_2-\beta_3=0,$<br>$\beta_i\in R$ | (26) |

Очевидно, що базисні функції в таблиці 3 як окремі випадки функцій (8) є гармонічними по Лапласу. При цьому функції (23) – (26) задовольняють критерію сталості похідної при довільних значеннях коефіцієнтів $\beta_i,\ i=\overline{1,3}$, що не суперечать умовам у таблиці 3. Функції (11) – (22) задовольняють критерію сталості похідної, якщо $\beta_1=\beta_2=\beta_3=0$, тобто у випадку, коли ці функції співпадають із квадратичним базисом октаедра [3].

Дослідження рівнянь (8) за допомогою інваріантів показали, що поверхні рівня, які відповідають базисним функціям, можуть бути поверхнями гіперболічного (однопорожнинний гіперболоїд, конус, двопорожнинний гіперболоїд) і параболічного типів (гіперболічний циліндр або пара площин, що перетинаються). Причому поверхні рівня є поверхнями обертання лише для квадратичного базису шестивузлового октаедра [3].

## Висновки, перспективи

У роботі засобами матричного числення отримано поліноміальні базиси другого степеня шестивузлового октаедра. Базисні функції є гармонічними за Лапласом. Вивчено геометричні властивості поверхонь рівня, що відповідають базисним функціям. Надалі передбачено дослідження інтерполяційних якостей отриманих базисів октаедра. З'явилися всі підстави вважати, що можна отримати альтернативні (можливо, нелінійні) базиси октаедра з 6-ма вузлами.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Hierarchical Meshes for Volume Data [Електронний ресурс] / R. Grosso, G. Greiner // Computer Graphics International 1998 (CGI`98). – 1998. – Режим доступу до журн.: http://dblp.uni-trier.de/db/conf/cgi/cgi1998.html#GrossoG98.

2. Bruijn H. Numerical Method for 3D Ideal Flow [Електронний ресурс] // Режим доступу: http://hdebruijn.soo.dto.tudelft.nl/jaar2010/octaeder.pdf.

3. Базисы шестиузлового октаедра : (Материалы международной научно-практической конференции “Перспективные научные исследования) [Електронний ресурс] / А. П. Мотайло // ”Серия: Математика: Прикладная математика (17 – 25 февраля 2011 г.). София, Болгария. – Режим доступу до журн.: http://www.rusnauka.com/6_PNI_2011/Matemathics/4_79999.doc.htm.

***Мотайло Анжеліка Павлівна*** – старший викладач кафедри вищої математики, тел. (0552)326995, e-mail: akilehzna@ukr.net.

***Хомченко Анатолій Нікіфорович*** – д. ф.-м. н, професор, завідувач кафедри прикладної математики та математичного моделювання, тел. (0552)326987, e-mail: mmkntu@gmail.com.

Херсонський національний технічний університет.