УДК 681.541.54

О. О. Ковалюк, аспірант

ВЗАЄМОДІЯ МАРКОВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ В МОДЕЛЯХ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В РОЗПОДІЛЕНИХ СИСТЕМАХ

Проаналізовано особливості прийняття рішень в розподілених системах. Запропоновано модель прийняття рішення в системі керування розподіленою системою, яка базується на використанні теорії марковських процесів для уточнення параметрів моделі.

Ключові слова: *прийняття рішень, розподілена система, марковські процеси.*

Інтенсивний розвиток комп'ютерної техніки та телекомунікаційних технологій відкрили нові можливості для вирішення **проблеми** прийняття рішень в розподілених системах. **Актуальність** проблеми зумовлена необхідністю підвищення ефективності керування такими розподіленими системами, як транспортна система міста, мережі тепло-, водо-, газопостачання та інші. Проте збільшення обчислювальних потужностей не гарантує керування з потрібною точністю в реальному масштабі часу, що пояснюється головним чином розгалуженою структурою систем, наявністю власних критеріїв керування в елементів, впливом невизначеності різного роду, в якій функціонує переважна більшість систем.

У найпростіших випадках для прийняття рішень в розподілених системах використовуються методи дискретної математики [1], які дозволяють формалізувати зв'язки між елементами системи. Проте методи цієї групи мають обмежене використання через непристосованість до врахування невизначеності вхідних даних. Інший підхід до прийняття рішень в розподілених системах пов'язаний з теорією ігор, яка має потужний математичний апарат для розв'язання прикладних задач [2]. Останнім часом все більшу увагу дослідників привертає теорія активних систем, головна ідея якої полягає в представленні системи у вигляді ієрархічних агентів, що взаємодіють між собою [3]. Проте формалізація впливів між елементами системи в моделях теорії ігор і теорії активних систем може бути досить складним процесом, що накладає обмеження на їх застосування в системах керування.

Тому постає **задача** розробки моделі прийняття рішень в розподілених системах, яка б враховувала взаємодію між елементами системи і могла бути представлена в матричному вигляді.

Для розв'язання поставленої задачі використаємо апарат марковських процесів [4, 5]. Розглянемо використання зазначеного підходу на прикладі системи керування транспортною мережею міста.

В роботі [6] показано, що система керування перехрестям може бути описана сукупністю одноканальних систем масового обслуговування з обмеженою чергою. Керування такою системою полягає у зміні інтенсивностей обслуговування потоків транспортних засобів μ шляхом коригування тривалості сигналів світлофора. Критерієм керування є середні втрати $\overline{G}$, які обчислюються як добуток середнього часу перебування транспортного засобу у черзі $\bar{t}$ та середньої довжини черги $\bar{r}$

$$\overline{G} = \bar{r} \cdot \bar{t}\,. \tag{1}$$

Отже, модель прийняття рішення на регульованому перехресті має вигляд

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{k} \overline{G}_i \to \min \\ \sum\limits_{i=1}^{k} \mu_i \le T \end{cases}, \tag{2}$$

де $\overline{G}_i$ – середні втрати i-го потоку; μ_i – інтенсивність обслуговування i-го потоку; k – кіль-кість потоків (систем масового обслуговування); T – період керування.

В теорії масового обслуговування доведено, що зазначені характеристики системи розраховуються на основі граничних ймовірностей станів.

Середня довжина черги:

$$\bar{r} = 1 \cdot \widetilde{p}(2) + 2 \cdot \widetilde{p}(3) + ... + (q-1) \cdot p(q) = \sum_{q=1}^{Q} (q-1) \cdot p(q)\,, \tag{3}$$

де $\widetilde{p}(q)$ – імовірність того, що на перехресті знаходиться q транспортних засобів; Q – максимальна кількість транспортних засобів у черзі.

Середній час очікування у черзі

$$\bar{t} = \widetilde{p}(1)\frac{1}{\mu} + \widetilde{p}(2)\frac{2}{\mu} + ... + \widetilde{p}(q)\frac{q}{\mu} = \sum_{q=1}^{Q} \widetilde{p}(q)\frac{q}{\mu}\,. \tag{4}$$

У зв’язку з тим, що стан транспортного потоку залежить головним чином від стану потоку в попередній момент часу, використаємо апарат марковських процесів для моделювання поведінки потоку.

Розглянемо для прикладу транспортну мережу, наведену на рис.

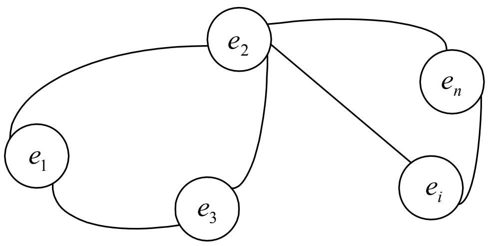

Рис. Фрагмент транспортної мережі

Нехай n – кількість елементів (черг транспортних засобів), що визначають загальний стан транспортної мережі; m – максимальна кількість станів елементів у системі. Позначимо через p_{ij} імовірність переходу елемента зі стану S_i в стан S_j. Під станом елемента S розумітимемо кількість транспортних засобів, що знаходяться в черзі на перехресті. Тоді ймовірність переходу елемента з одного стану в інший описується матрицею

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Для елемента транспортної мережі марковський ланцюг є ергодичним, оскільки елемент може перейти у будь-який із своїх станів за кінцеве число кроків. Ще однією особливістю розглянутого марковського ланцюга є неоднорідність, зумовлена різною інтенсивністю потоку протягом доби, а отже, різними значеннями p_{ij}.

Для неоднорідного ланцюга матриця (5) у фіксовані моменти часу приймає різні значення $P^{(1)}$, $P^{(2)}$,..., $P^{(k)}$. В цьому випадку елементи матриці (5) будуть функціями станів інших потоків системи. Для системи, наведеної на рис., перехідні ймовірності елемента e_1 залежатимуть від станів елементів e_2 і e_3 :

$$p_{1ij} = f\left(S_{2\tau_{21}}, S_{3\tau_{31}}\right), \tag{6}$$

де p_{1ij} – імовірність переходу 1-го елемента із стану i в стан j; $S_{i\tau_{i1}}$ – стан i-го елемента системи, віддалений на τ_{i1} назад від поточного моменту; τ_{i1} – час передавання впливу від i-го елемента до 1-го елемента, виміряний у кроках роботи системи.

Запишемо рівняння (6) через імовірності станів

$$p_{1ij} = \varphi\left(\widetilde{p}_{2\tau_{21}}, \widetilde{p}_{3\tau_{31}}\right). \quad (7)$$

Тоді ймовірність переходу в загальному вигляді описується функцією

$$p_{vij} = \psi\left(\widetilde{P}^{(k)}, \widetilde{P}^{(k-1)}, ..., \widetilde{P}^{(0)}, C_v, \mathrm{T}\right), \quad v = 1...n, \quad i, j = 1...m, \quad (8)$$

де $\widetilde{P}^{(k)}$ – матриця ймовірностей станів елементів системи на k-му кроці розміром $n \times m$; C_v – 4-вимірний масив вагових коефіцієнтів $[n, m, n+1, m+1]$; T – матриця затримок передавання впливів розміром $n \times n$.

Розглянемо зміст наведених матриць.

Елемент $\widetilde{p}_{ij} \in \widetilde{P}$ визначає ймовірність того, що i-й елемент перебуває у j-му стані. Якщо максимальна кількість станів i-го елементу системи дорівнює $m_i < m$, то $\widetilde{p}_{ij} = 0, j \in [m_i, m]$.

Елемент матриці $c_{vij}^{lh} \in C_v$ визначає вплив h-го стану l-го елемента на вектор перехідних ймовірностей v-го елемента. Елемент c_{vij}^{00} – ймовірність переходу v-го елемента з i-го в j-й стан без урахування впливу інших елементів.

Елементи матриці $\tau_{ij} \in T$ – цілі числа, які показують через скільки кроків стан i-го елемента впливатиме на стан j-го елемента.

Враховуючи залежність (7) у лінеаризованому вигляді [7], запишемо імовірність переходу v-го елемента з i-го в j-й стан

$$p_{vij}^{(k)} = c_{vij}^{00} + \sum_{l=1}^{n} \sum_{h=1}^{m} \left(c_{vij}^{lh} \cdot \widetilde{p}_{lh}^{(k-\tau_{lh})}\right). \quad (9)$$

Для неоднорідного марківського ланцюга імовірність того, що v-й елемент системи після k кроків перебуватиме в j-му стані, визначатиметься за формулою

$$\widetilde{p}_{vj}^{(k)} = \sum_{i=1}^{m} \widetilde{p}_{vi}^{(k-1)} p_{vij}^{(k)} \quad (10)$$

або

$$\widetilde{p}_{vj}^{(k)} = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \widetilde{p}_{vi}^{(k-1)} \cdot \left[c_{vij}^{00} + \sum_{l=1}^{n} \sum_{h=1}^{m} \left(c_{vij}^{lh} \cdot \widetilde{p}_{lh}^{(k-\tau_{ij})} \right) \right] \right\}. \quad (11)$$

Запишемо рівняння аналогічні (10) для станів кожного елемента системи. Утворена система буде містити $n \times m$ рівнянь

$$\begin{cases} \widetilde{p}_{11}^{(k)} = \sum_{i=1}^{m} \widetilde{p}_{1i}^{(k-1)} p_{1i1}^{(k)} \\ \widetilde{p}_{vj}^{(k)} = \sum_{i=1}^{m} \widetilde{p}_{vi}^{(k-1)} p_{vij}^{(k)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \widetilde{p}_{nm}^{(k)} = \sum_{i=1}^{m} \widetilde{p}_{ni}^{(k-1)} p_{nim}^{(k)} \end{cases}. \quad (12)$$

Якщо імовірність переходу елемента в наступний стан на k-му кроці залежить тільки від станів на попередніх кроках, то рівняння системи будуть незалежними і розв’язуються окремо одне від одного. У випадку, коли стан елемента на k-му кроці залежатиме від того, в який стан перейдуть інші елементи на цьому кроці, права частина рівнянь системи (11) буде містити імовірності з лівої частини інших рівнянь.

Виділимо в рівнянні (11) доданок, що залежить від k-го кроку.

Отримаємо

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{vj}^{(k)} &= \sum_{i=1}^{m}\left(\tilde{p}_{vi}^{(k-1)}\cdot\left[c_{vij}^{00}+\sum_{\substack{l=1\\ \tau_{lv}>0}}^{n}\sum_{h=1}^{m}\left(c_{vij}^{lh}\cdot\tilde{p}_{lh}^{(k-\tau_{lv})}\right)\right]\right)+\\ &+\sum_{i=1}^{m}\left(\tilde{p}_{vi}^{(k-1)}\cdot\left[c_{vij}^{00}+\sum_{\substack{l=1\\ \tau_{lv}=0}}^{n}\sum_{h=1}^{m}\left(c_{vij}^{lh}\cdot\tilde{p}_{lh}^{(k)}\right)\right]\right)\end{aligned}. \qquad (13)$$

Перетворимо другий доданок (13)

$$\tilde{p}_{vj}^{(k)} = \sum_{i=1}^{m}\left(\tilde{p}_{vi}^{(k-1)}\cdot\left[c_{vij}^{00}+\sum_{\substack{l=1\\ \tau_{lv}>0}}^{n}\sum_{h=1}^{m}\left(c_{vij}^{lh}\cdot\tilde{p}_{lh}^{(k-\tau_{lv})}\right)\right]\right)+\sum_{i=1}^{m}\left(\tilde{p}_{vj}^{(k-1)}\cdot c_{vij}^{00}\right)+\sum_{i=1}^{m}\tilde{p}_{vi}^{(k-1)}\cdot\sum_{\substack{l=1\\ \tau_{lv}=0}}^{n}\sum_{h=1}^{m}\left(c_{vij}^{lh}\cdot\tilde{p}_{lh}^{(k)}\right).$$

Введемо позначення

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{\tilde{p}_{vj}^{(k-1)}\cdot\left[c_{0ij}^{(v)}+\sum_{i=1,k_{ij}\neq\tau_{ij}}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(c_{ij}^{(v)}\cdot\tilde{p}_{ij}^{(\tau_{ij})}\right)\right]\right\}+\sum_{i=1}^{m}\left(\tilde{p}_{vj}^{(k-1)}\cdot c_{vij}^{00}\right)=b_{vj}.$$

Тоді рівняння (13) набуде вигляду

$$\tilde{p}_{vj}^{(k)}-\sum_{i=1}^{m}\tilde{p}_{vi}^{(k-1)}\cdot\sum_{\substack{l=1\\ \tau_{lv}=0}}^{n}\sum_{h=1}^{m}\left(c_{ij}^{lh}\cdot\tilde{p}_{lh}^{(k)}\right)=b_{vj}, \qquad (14)$$

а система (11) перепишеться у вигляді

$$\begin{cases}\tilde{p}_{1j}^{(k)}-\sum\limits_{i=1}^{m}\tilde{p}_{1i}^{(k-1)}\cdot\sum\limits_{\substack{l=1\\ \tau_{lv}=0}}^{n}\sum\limits_{h=1}^{m}\left(c_{1ij}^{lh}\cdot\tilde{p}_{lh}^{(k)}\right)=b_{1j}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \tilde{p}_{vj}^{(k)}-\sum\limits_{i=1}^{m}\tilde{p}_{vi}^{(k-1)}\cdot\sum\limits_{\substack{l=1\\ \tau_{lv}=0}}^{n}\sum\limits_{h=1}^{m}\left(c_{vij}^{lh}\cdot\tilde{p}_{lh}^{(k)}\right)=b_{vj}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \tilde{p}_{mn}^{(k)}-\sum\limits_{i=1}^{m}\tilde{p}_{mi}^{(k-1)}\cdot\sum\limits_{\substack{l=1\\ \tau_{lv}=0}}^{n}\sum\limits_{h=1}^{m}\left(c_{mij}^{lh}\cdot\tilde{p}_{lh}^{(k)}\right)=b_{mn}\end{cases}. \qquad (15)$$

Розв’язком системи (15) будуть імовірності станів елементів системи на k-му кроці, які можна знайти за допомогою відомих методів розв’язання систем лінійних рівнянь. Відповідно до методу Крамера

$$\tilde{p}_{ij}^{(k)} = \frac{\Delta}{\Delta_j}, \qquad (16)$$

де Δ – головний визначник системи;

Δ_j – визначник, утворений шляхом заміни j -го стовпця стовпцем вільних членів.

Висновки

Отже, розроблено модель взаємодії марковських процесів в розподіленій системі, яка дозволяє врахувати взаємодію між елементами системи. Використання запропонованої моделі підвищує точність розрахунку ймовірностей станів елементів та збільшує загальну ефективність функціонування системи. Модель може широко використовуватись для розрахунку параметрів телекомунікаційних мереж, веб-сайтів, інших складних об'єктів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Зыков А. А. Основы теории графов. – М.: Наука ,1987. – 384с.

2. Дюбин Г. Н., Суздаль В. Г. Введение в прикладную теорию игр / Под ред. Н.Н. Воробьева. – М.: Наука, 1981. – 336с.

3. Новиков Д. А., Петраков С. Н. Курс теории активных систем. – М.: СИНТЕГ, 1999. – 104 с.

4. H. S. Chang, M. C. Fu, J. Hu, and S. I. Marcus A Survey of Some Simulation-based Methods in Markov Decision Processes // Communications in Information and System, 2007. – №7. – P. 59 – 92.

5. Дубовой В. М., Ковалюк О. О. Стійкість процесу керування транспортною мережею міста // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – Вінниця, 2006.–№6.–С. 106 – 111

6. Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А. Управляемые марковские процессы и их приложения. – М.: Наука, 1975. – 341с

7. Дубовой В. М., Ковалюк О. О. Оцінювання параметрів транспортних потоків міста // Вісник Хмельницького національного університету. – Хмельницький, 2005. – №4 .– С. 197 – 200

Ковалюк Олег Олександрович — аспірант кафедри комп'ютерних систем управління.

Вінницький національний технічний університет