УДК 621.3(075)

Ю. Г. Ведміцький, к. т. н.; В. В. Кухарчук, д. т. н., проф.

ПЕРЕХІДНІ КОМПЛЕКСНІ СХЕМИ, ЗАКОНИ КІРХГОФА ТА КОМПОНЕНТНІ СПІВВІДНОШЕННЯ В КОМПЛЕКСНО-ЧАСОВІЙ ФОРМІ ВІДОБРАЖЕННЯ

У роботі запропоновано й розроблено поняття перехідної комплексної схеми електричного кола та визначено її істотні властивості – закони Кірхгофа й компонентні співвідношення в комплексно-часовій формі відображення, які у своїй єдності є основними елементами теоретичного базису символьно-класичного метода розв'язування задачі Коші, сформульованої в термінах миттєвих комплексних струмів і напруг для розрахунку перехідних процесів у лінійних електричних колах синусоїдного та періодичного несинусоїдного струмів.

Ключові слова: *електричне коло, перехідний процес, задача Коші, комплексно-символічний метод, миттєві комплексні струми й напруги, закони Кірхгофа, компонентні співвідношення, диференціальні рівняння руху, закони комутації в комплексній формі.*

Вступ

Розробка та вдосконалення методів розрахунку й аналізу перехідних процесів в електричних колах синусоїдного струму й дотепер залишаються важливою й актуальною задачею під час дослідження електротехнічних систем з *періодичною* формою руху.

Такий статус задачі зумовлений наявністю потреб практичного походження – у своєму прояві різноманітних як за глибиною проникнення, так і за обсягом охоплення [1]. Це пояснюється, з одного боку, підвищеною, а подекуди навіть і недопустимо критичною, чутливістю робочих параметрів і характеристик зазначених технічних систем, наприклад, об'єктів силової електроенергетики або електромеханіки, до режимів перехідного процесу, який неодноразово можна спостерігати в них навіть протягом одного виробничого циклу, а з іншого – обсягом ареалу таких систем та їх загальним сукупним упливом на техногенну сферу загалом.

Водночас важливим залишається й суто теоретичний складник зазначеної задачі [2], оскільки система тригонометричних функцій з кратними частотами виду $\cos\left(m\frac{2\pi}{T}t\right)$ і $\sin\left(m\frac{2\pi}{T}t\right)$, де $m=(1,\ 2,...)$, є одним із фундаментальних та найуживаніших ортогональних нормованих базисів гільбертового простору миттєвих напруг і струмів, елементи якого в змозі визначати еволюційний рух кожної із заявлених вище технічних систем не тільки в усталеному режимі роботи, але й під час перехідного процесу. В останньому випадку фізичний перехідний процес у системі має супроводжуватися одночасною зміною всіх коефіцієнтів тригонометричного ряду Фур'є в часі, а за умови сталості періоду T – навіть здатен перебувати у відношенні *еквівалентності* до такої зміни. Для лінійних або лінеаризованих електротехнічних систем із періодичною формою руху це означає, що задачу Коші, яка, як відомо, є математичною інтерпретацією задачі аналізу перехідного процесу в фізичних та технічних системах із зосередженими параметрами, можна сформулювати й розв'язати відносно кожного гармонічного складника з тригонометричного ряду окремо, а потому остаточний її розв'язок відшукати, скориставшись принципом накладання (або інакше – принципом суперпозиції). Водночас, оскільки коефіцієнти Фур'є кожної з перехідних гармонік, наприклад, струму, прямо визначають її амплітуду та початкову фазу, унаслідок чого та набуває вигляду

$$i^{(m)}(t) = I_m^{(m)}(t) sin\left[m\omega t + \psi_i^{(m)}(t)\right], \tag{1}$$

саму задачу Коші доцільно формулювати не в термінах миттєвих струмів $i^{(m)}(t)$ (чи напруг), але в термінах їх комплексних зображень, тобто *миттєвих комплексних струмів*

$$\underline{I}_m^{(m)}(t) = I_m^{(m)}(t)\, e^{j\psi_i^{(m)}(t)}, \tag{2}$$

де

$$i^{(m)}(t) = Im\left\{\underline{I}_m^{(m)}(t) e^{jm\omega t}\right\}. \tag{3}$$

За такого підходу, як це показано в роботі [3], обидві множини функцій $I_m^{(m)}(t)$ і $\psi_i^{(m)}(t)$, а в разі зміни під час перехідного процесу періоду $T(t)$ – ще й функції $m\omega(t)$, їх перші та вищі похідні, інтеграли, інтегральні перетворення як окремо, так і в різних сполученнях здатні описувати й виявляти не тільки видимі, але й глибинні, приховані та аномальні властивості перебігу перехідних процесів в електричному колі і в якісній формі, і аналітично.

Варто зауважити, що теоретична електротехніка задачу аналізу перехідних процесів в електричних колах синусоїдного струму на сьогодні здатна системно і результативно розв'язувати практично в усіх її проявах. Для цього пропонують чимало методів розрахунку, серед яких – класичний, операторний, спектральний методи, метод інтеграла Дюамеля тощо. Сутність наведених методів ґрунтовно розкривають у численних наукових та навчальних літературних джерелах, наприклад, [4 – 13]. Водночас, як свідчать дослідження більшості із зазначених вище видань, фундаментальну задачу Коші формулюють у них винятково в термінах миттєвих струмів і напруг. Такий підхід домінує і в тих випадках, коли з метою розв'язування зазначеної задачі використовують інтегральні перетворення, зокрема інтеграли Фур'є, Лапласа або Карсона. На превеликий жаль, можливість формування задачі Коші відносно функцій миттєвих *комплексних* струмів виду (2) в зазначеній бібліографії не тільки не розкрито, про неї навіть і не згадується. Певне, саме це й пояснює той факт, що методичний супровід цього підходу, попри затребуваність у ньому, перебуває на сьогодні в недостатньо розробленому й незадовільно розгорнутому стані.

Отож, *метою* цієї роботи є розробка на основі функцій виду (2) поняття перехідної комплексної схеми електричного кола, визначення істотних ознак і фундаментальних властивостей такої схеми, зокрема законів Кірхгофа і компонентних співвідношень у комплексно-часовій формі відображення, розробка основних принципів і правил її побудови. У своїй сукупності розроблені теоретичні поняття і співвідношення мають стати важливими елементами теоретичного базису *символьно-класичного метода* – одного із інформативних методів розрахунку та аналізу перехідних процесів у лінійних колах синусоїдного струму [3].

1 Диференціальне рівняння перехідного процесу в комплексній формі

Насамперед зауважимо, що зараз і надалі результати дослідження будуть наведені винятково щодо першої (тобто основної) гармоніки тригонометричного ряду Фур'є, однак виписані для неї співвідношення з урахуванням порядку кратності зберігатимуть свою чинність і для вищих гармонік.

Відомо, що перехідний процес у лінійному електричному колі з декількома джерелами синусоїдної напруги однакової частоти

$$u_1 = U_{m_1} sin\left(\omega t + \psi_{u_1}\right),\ \ldots,\ u_\nu = U_{m_\nu} sin\left(\omega t + \psi_{u_\nu}\right)$$

можна описати лінійним звичайним диференціальним рівнянням *n*-го порядку, складеним відносно, наприклад, деякого миттєвого струму $i(t)$ виду (1) на основі законів Кірхгофа і компонентних співвідношень,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k i}{d t^k} = \sum_{q=1}^{v}\sum_{s=0}^{w} b_{sq} \frac{d^s u_q}{d t^s} \tag{4}$$

з n початковими умовами: $i(0_+)$, $\dfrac{d\, i(0_+)}{d t},\ldots,\dfrac{d^{n-1} i(0_+)}{d t^{n-1}}$.

Водночас, урахувавши співвідношення (3), визначену в спосіб (4) задачу Коші допустимо, а в багатьох випадках і доцільно, формулювати інакше – у термінах миттєвих комплексних струмів та напруг. За такої інтерпретації перехідний процес у колі відображатиметься диференціальним рівнянням у комплексній формі, доповненим n початковими умовами виду: $\underline{I}_m(0_+)$, $\dfrac{d\, \underline{I}_m(0_+)}{d t},\ldots,\dfrac{d^{n-1} \underline{I}_m(0_+)}{d t^{n-1}}$. Саме ж рівняння матиме вигляд:

$$\sum_{k=0}^{n} \underline{A}_k \frac{d^k \underline{I}_m(t)}{d t^k} = \sum_{q=1}^{v}\left(\underline{B}_{0_q} \cdot \underline{U}_{m_q}\right). \tag{5}$$

Комплексні коефіцієнти в рівнянні (5) можуть бути визначені в різний спосіб.

Наприклад, їх можна розрахувати через коефіцієнти диференціального рівняння (4), але за умови, якщо тільки таке рівняння для заданого кола буде отримано заздалегідь. Тоді, як це показано в роботі [3], для електричного кола *довільного* порядку (з наперед не заданим числом ступенів вільності) закон перетворення коефіцієнтів рівняння (4) у відповідні коефіцієнти рівняння (5) перебуватиме в підпорядкуванні до біному Ньютона і матиме такий вигляд:

$$\underline{A}_k = \sum_{p=0}^{n-k}\left[\frac{(k+p)!}{k!\ p!}\cdot (j\omega)^p \cdot a_{k+p}\right],\quad \underline{B}_{0_q} = \sum_{s=0}^{n} (j\omega)^s\, b_{qs}\,, \tag{6}$$

оскільки, по-перше, кожна k-та похідна миттєвого струму $i(t)$ в лівій частині (4) може бути записана через миттєвий комплексний струм $\underline{I}_m(t)$ і його похідні як

$$a_k \frac{d^k i}{d t^k} = \operatorname{Im}\left\{ a_k \cdot \sum_{p=0}^{k}\left[\frac{k!}{p!(k-p)!}\cdot (j\omega)^p \cdot \frac{d^{k-p}\underline{I}_m(t)}{d t^{k-p}}\right]\cdot e^{j\omega t}\right\}, \tag{7}$$

що дозволяє в подальшому здійснити перегрупування та привести отриманий вираз до виду лівої частини формули (5):

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{ a_k \cdot \sum_{p=0}^{k}\left[\frac{k!}{p!(k-p)!}\cdot (j\omega)^p \cdot \frac{d^{k-p}\underline{I}_m(t)}{d t^{k-p}}\right]\right\} = \sum_{k=0}^{n}\left\{\sum_{p=0}^{n-k}\left[\frac{(k+p)!}{k!\ p!}\cdot (j\omega)^p \cdot a_{k+p}\right]\cdot \frac{d^k \underline{I}_m(t)}{d t^k}\right\},$$

і, по-друге, кожна s-та похідна вже в правій частині рівняння (4) також може бути записана подібним чином і на цій основі з урахуванням незмінності в часі амплітуд, початкових фаз і частоти зовнішніх джерел енергії переписана в комплексній формі, приведеній до виду вже правої частини формули (5):

$$\sum_{q=1}^{v}\left(\sum_{s=0}^{n} b_{sq}\frac{d^s u_q}{d t^s}\right) = \operatorname{Im}\left\{\sum_{q=1}^{v}\left[\sum_{s=0}^{n}\left((j\omega)^s \cdot b_{sq}\right)\cdot \underline{U}_{m_q}\right]\cdot e^{j\omega t}\right\} = \operatorname{Im}\left\{\sum_{q=1}^{v}\left(\underline{B}_{0_q}\underline{U}_{m_q}\right)\cdot e^{j\omega t}\right\}.$$

Водночас варто зазначити, що, окрім наведеного опосередкованого способу, коефіцієнти рівняння (5), власне, як і саме рівняння, можуть бути отримані безпосередньо за допомогою перехідної комплексної схеми досліджуваного кола та законів Кірхгофа в комплексно-часовій формі відображення, що дозволить уникнути необхідності попереднього складання рівняння (4) та визначення його коефіцієнтів із подальшим перерахуванням за формулами (6).

2 Перехідні комплексні схеми, закони Кірхгофа та компонентні співвідношення в комплексно-часовій формі відображення

Миттєві комплексні струми та напруги є самодостатніми аналітичними об’єктами, унаслідок чого диференціальне рівняння перехідного процесу виду (5) може бути побудоване за єдиними правилами в зручний і загальноприйнятий у теоретичній електротехніці спосіб, тобто за допомогою топологічно структурованих та імперативно підпорядкованих об’єктів.

Уведемо поняття *перехідної комплексної схеми*, якою називатимемо схематично і топологічно структурований двополюсними елементами об’єкт із миттєвими комплексними струмами у вітках та напругами на його ділянках, математично зв’язаними поміж собою законами Кірхгофа та компонентними співвідношеннями, виписаними в комплексно-часовій формі відображення.

Закони Кірхгофа в комплексно-часовій формі є основою для формування системи інтегро-диференціальних рівнянь, складених відносно миттєвих комплексних струмів у вітках або напруг на них, які надалі можна використовувати і для побудови диференціальних рівнянь виду (5) або (4), і в самостійний спосіб – для більш глибокого та уточненого дослідження перехідних процесів в електричному колі.

Сформулюємо зазначені закони.

Перший закон Кірхгофа в комплексно-часовій формі стверджує, що алгебраїчна сума миттєвих комплексних струмів віток, які сходяться у вузлі перехідної комплексної схеми в будь-який момент часу дорівнює нулю:

$$\sum_{l=1}^{h} \underline{I}_{m_l}\left(t\right) = 0\,. \tag{8}$$

Другий закон Кірхгофа в комплексно-часовій формі, у свою чергу, встановлює, що алгебраїчна сума миттєвих комплексних напруг на окремих елементах довільного замкнутого контуру перехідної комплексної схеми в будь-який момент часу дорівнює нулю:

$$\sum_{l=1}^{c} \underline{U}_{m_l}\left(t\right) = 0\,. \tag{9}$$

Методика складання системи рівнянь за законами Кірхгофа в комплексно-часовій формі не відрізняється від усталеної.

Варто зазначити, що обидва наведених закони Кірхгофа в комплексно-часовій формі є більше *постулатами,* оскільки цим законам властивий більший ступінь узагальненості, їх неможливо ані ввести, ані обґрунтувати через закони Кірхгофа, виписані відносно миттєвих напруг і струмів (тобто в класичній формі). Водночас така узагальненість споріднює обидві форми й унеможливлює виникнення протиріччя між ними. Чинність законів Кірхгофа в комплексно-часовій формі не тільки залишає в силі, але й передбачає дієздатність і спроможність їх класичних аналогів. Такий характер відношення між відомими та індуктивно введеними формами законів Кірхгофа є надзвичайно важливим, оскільки слугує необхідною умовою істинності останніх. Водночас підтвердити й затвердити такий статус або ж, що не виключено, і протилежне – спростувати його, звичайно ж, має практична перевірка – вимоглива, тривала і всебічна.

Одним із важливих наслідків вищесказаного є й те, що закони Кірхгофа в комплексно-часовій формі завдяки своїй узагальненості підпорядковують собі не тільки усталені режими роботи електричних кіл синусоїдного струму, але й перебіг перехідних процесів у них, на відміну від законів Кірхгофа в комплексній формі, які, як відомо, вибудовано на основі класичних законів для теоретичного супроводу поширеного метода комплексних амплітуд (символічного метода) з метою розрахунку усталених режимів у зазначених електричних колах.

Для розрахунку та аналізу перехідних процесів, окрім законів Кірхгофа в комплексно-часовій формі відображення (8) та (9), потрібно використовувати ще й спеціальні математичні рівняння, які в теоретичній електротехніці сукупно називають *компонентними співвідношеннями*. Компонентні співвідношення виявляють математичні зв’язки між миттєвими напругами та струмами на окремих ідеалізованих пасивних елементах електричного кола. Звісно у нашому випадку ці зв’язки мають бути переписані в комплексно-часовій формі. Важливо наголосити, що в таких зв’язках між миттєвими напругами і струмами, нарізно взятих основних пасивних двополюсних елементів електричного кола, знаходять своє відображення важливі закони електротехніки, зокрема закони Ома та електромагнітної індукції Фарадея, тому компонентні співвідношення, представлені комплексно-часовою формою, також мають бути безпосереднім виявом цих законів.

Із сказаного вище випливає, що до складу перехідних комплексних схем повинні входити елементи тільки з такими властивостями, за яких миттєві *комплексні* струми і напруги бієктивно відповідатимуть миттєвим струмам і напругам на окремих елементах реальних електричних кіл. Саме така взаємна однозначність і має стати тим стрижнем, який зможе забезпечити необхідну адекватність отриманих результатів дослідження реаліям вихідної задачі під час аналізу динамічних режимів на основі перехідних комплексних схем.

Отже, для основних пасивних двополюсних елементів електричного кола: активного опору, індуктивності та ємності – компонентні співвідношення в комплексно-часовій формі сформуємо на основі класичних співвідношень, виписаних для миттєвих струмів і напруг.

Резистивний елемент. Для цього двополюсного елемента математичний зв'язок між миттєвими напругою і струмом визначають законом Ома [8]:

$$u(t) = R\,i(t), \tag{10}$$

де $u(t) = U_m(t) sin[\omega t + \psi_u(t)]$, $i(t) = I_m(t)\sin[\omega t + \psi_i(t)]$, що з урахуванням (1) – (3) дозволяє отримати співвідношення для їх комплексних зображень у вигляді закону Ома в комплексно-часовій формі:

$$\underline{U}_m(t) = R\,\underline{I}_m(t). \tag{11}$$

Індуктивний елемент. Математичний зв’язок між миттєвими напругою і струмом на цьому двополюсному елементі зумовлений законом електромагнітної індукції Фарадея, на основі якого вводять відповідне компонентне співвідношення [8]:

$$u(t) = L\frac{d}{dt}i(t). \tag{12}$$

З урахуванням (7), де для $k = 1$ маємо $L\dfrac{d}{dt}i(t) = \operatorname{Im}\left\{\left[L\dfrac{d}{dt}\underline{I}_m(t) + j\omega L\,\underline{I}_m(t)\right]\cdot e^{j\omega t}\right\}$, наведене компонентне співвідношення дозволяє виявити характер математичних зв’язків між миттєвими комплексними напругою та струмом на індуктивності, а саме:

$$\underline{U}_m(t) = L\frac{d}{dt}\underline{I}_m(t) + j\omega L\underline{I}_m(t). \tag{13}$$

Ємнісний елемент. Як відомо [8], на цьому елементі миттєві напруга і струм пов’язані компонентним співвідношенням:

$$i(t) = C\frac{d}{dt}u(t), \tag{14}$$

через це математичний зв’язок між відповідними миттєвими комплексними напругою і струмом матиме вигляд:

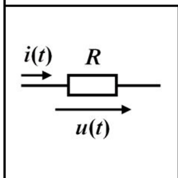
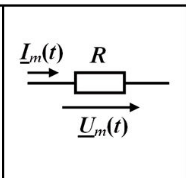
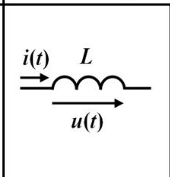
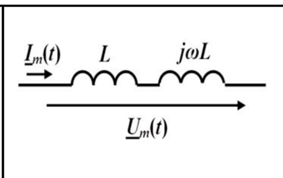
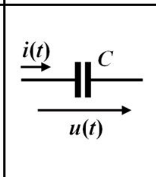
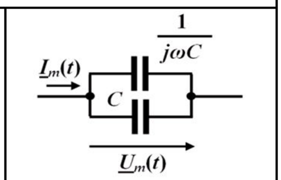
$$\underline{I}_m(t) = C\frac{d}{dt}\underline{U}_m(t) + j\omega C\underline{U}_m(t), \tag{15}$$

оскільки відповідно до (7) $C\frac{d}{dt}u(t) = \mathrm{Im}\left\{\left[C\frac{d}{dt}\underline{U}_m(t) + j\omega C\underline{U}_m(t)\right]\cdot e^{j\omega t}\right\}$.

Компонентні співвідношення в комплексно-часовій формі, зокрема (11), (13), (15), не тільки розкривають закономірності у зв’язках між миттєвими комплексними напругами і струмами на окремо взятих елементах електричного кола, вони водночас дозволяють встановити бієктивну відповідність між цими елементами та елементами перехідної комплексної схеми, визначивши важливі принципи та правила побудови останньої. Для основних пасивних елементів електричного кола ці правила представлені табл. 1, де почленно в кожному стовпчику, розташованому ліворуч, наведено власне елемент вихідного кола, а праворуч – відповідний йому фрагмент перехідної комплексної схеми, який за умови виконання законів Кірхгофа здатен забезпечити поміж миттєвими комплексними напругами і струмами необхідне з вищевиписаних компонентне співвідношення в комплексно-часовій формі.

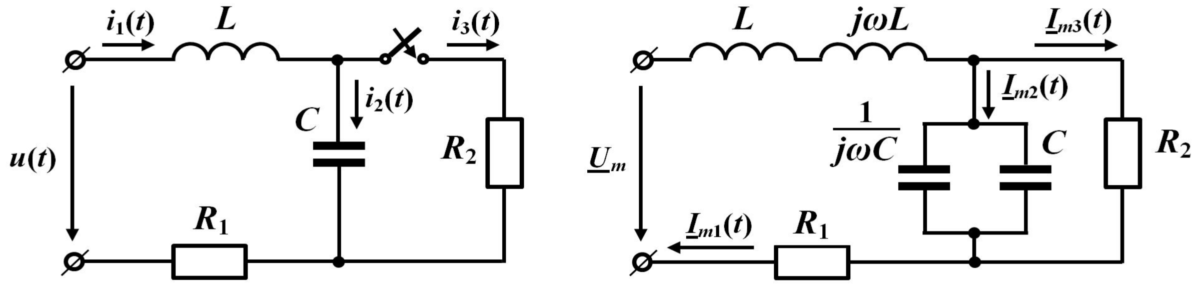
Таблиця 1

Таблиця відповідності між елементами електричного кола і перехідної комплексної схеми

Резистивний елемент		**Індуктивний елемент**		**Ємнісний елемент**	
					
$u = Ri$	$\underline{U}_m = R\underline{I}_m$	$u = L\frac{di}{dt}$	$\underline{U}_m = L\frac{d\underline{I}_m}{dt} + j\omega L\underline{I}_m$	$i = C\frac{du}{dt}$	$\underline{I}_m = C\frac{d\underline{U}_m}{dt} + j\omega C\underline{U}_m$

3 Приклад постановки задачі Коші на основі перехідної комплексної схеми, законів Кірхгофа і компонентних співвідношень у комплексно-часовій формі

Наведемо приклад постановки задачі Коші в термінах миттєвих комплексних струмів і напруг за допомогою запропонованої перехідної комплексної схеми та законів Кірхгофа і компонентних співвідношень у комплексно-часовій формі відображення. Водночас зробимо часткову перевірку адекватності зазначених базисних елементів фізичному протіканню перехідного процесу в колі синусоїдного струму, описуваному миттєвими струмами або напругами. Для цього скористаємося одним із топологічно широковживаних у теоретичній електротехніці прикладів електричного кола 2-го порядку, схему якого показано на рис. 1, а. Поряд, на рис. 1, б, за визначеними вище правилами (див. табл. 1) побудовано перехідну комплексну схему цього кола.



а) б)

Рис. 1. Електричне коло 2-го порядку та його перехідна комплексна схема

Система рівнянь, яку в загальноприйнятий спосіб складено для перехідної комплексної схеми на підставі законів Кірхгофа (8), (9) та компонентних співвідношень (11), (13), (15) в комплексно-часовій формі відносно миттєвих комплексних струмів у вітках та напруги на ємнісному елементі, має вигляд:

$$\begin{cases} \underline{I}_{m_1}(t)-\underline{I}_{m_2}(t)-\underline{I}_{m_3}(t)=0; \\ \underline{I}_{m_2}(t)-C\dfrac{d}{dt}\underline{U}_{m_C}(t)-j\omega C\underline{U}_{m_C}(t)=0; \\ L\dfrac{d}{dt}\underline{I}_{m_1}(t)+(R_1+j\omega L)\underline{I}_{m_1}(t)+\underline{U}_{m_C}(t)=\underline{U}_m; \\ R_2\underline{I}_{m_3}(t)-\underline{U}_{m_C}(t)=0, \end{cases} \tag{16}$$

де $\underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u} = \underline{const}$.

Рівняння перехідного процесу в колі нескладно отримати, якщо переписати систему (16) відносно однієї з шуканих функцій, наприклад, миттєвого комплексного струму $\underline{I}_{m_1}(t)$. Тоді диференціальне рівняння набуде вигляду рівняння (5) за умови $n=2$, а саме:

$$\underline{A}_2\frac{d^2}{dt^2}\underline{I}_{m_1}(t)+\underline{A}_1\frac{d}{dt}\underline{I}_{m_1}(t)+\underline{A}_0\underline{I}_{m_1}(t)=\underline{B}_0\underline{U}_m, \tag{17}$$

де коефіцієнти $\underline{A}_2 = LCR_2$; $\underline{A}_1 = L+CR_1R_2+j2\omega LCR_2$; $\underline{A}_0 = R_1+R_2-\omega^2 LCR_2+j\omega(L+CR_1R_2)$; $\underline{B}_0 = 1+j\omega CR_2$.

Початкові ж умови задачі Коші в зазначеній постановці необхідно розраховувати за допомогою комплексної схеми докомутаційного кола на основі незалежних початкових умов та законів комутації, представлених комплексною формою [3]:

$$\underline{I}_{m_L}(0_+)=\underline{I}_{m_L}(0)=\underline{I}_{m_L}(0_-);\quad \underline{U}_{m_C}(0_+)=\underline{U}_{m_C}(0)=\underline{U}_{m_C}(0_-).$$

У нашому випадку двома початковими умовами шуканої задачі Коші будуть співвідношення:

$$\begin{aligned}&\underline{I}_{m_1}(0_+)=\frac{\underline{U}_m}{R_1+j\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)};\\&\frac{d\,\underline{I}_{m_1}(0_+)}{d\,t}=0,\end{aligned}\tag{18}$$

друге з яких нескладно отримати, скориставшись третім рівнянням системи (16).

Із метою перевірки отриманого результату складемо диференціальне рівняння перехідного процесу відносно миттєвого струму $i_1(t)$. Для цього, скориставшись схемоювихідного електричного кола (див. рис. 1, а), спочатку побудуємо систему рівнянь на основі законів Кірхгофа і компонентних співвідношень (10), (12), (14), виписаних у класичній формі,

$$\begin{cases}i_1(t)-i_2(t)-i_3(t)=0;\\ i_2(t)-C\,\dfrac{d}{d\,t}u_C(t)=0;\\ L\,\dfrac{d}{d\,t}i_1(t)+R_1\,i_1(t)+u_C(t)=u(t);\\ R_2\,i_3(t)-u_C(t)=0,\end{cases}\tag{19}$$

де $u(t)=U_m\sin(\omega t+\psi_u)$, а потім перепишемо (19) відносно струму $i_1(t)$. У результаті отримуємо диференціальне рівняння 2-го порядку виду (4)

$$a_2\frac{d^2}{d\,t^2}i_1(t)+a_1\frac{d}{d\,t}i_1(t)+a_0 i_1(t)=b_1\frac{d}{d\,t}u(t)+u(t)\tag{20}$$

з коефіцієнтами $a_2=LCR_2$; $a_1=L+CR_1R_2$; $a_0=R_1+R_2$; $b_1=CR_2$; $b_0=1$.

За такої постановки задачі Коші рівняння (20) потрібно доповнити відповідними початковими умовами, звичайно ж, відмінними від (18):

$$\begin{aligned}&i_1(0_+)=\frac{U_m}{\sqrt{R_1^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}sin\left(\psi_u-arctg\frac{\omega L-\dfrac{1}{\omega C}}{R_1}\right);\\&\frac{d\,i_1(0_+)}{d\,t}=\frac{u(0_+)-u_C(0_+)-R_1\,i_1(0_+)}{L},\end{aligned}\tag{21}$$

де $u(0_+)=U_m\sin\psi_u$; $u_C(0_+)=\dfrac{-U_m}{\omega C\sqrt{R_1^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}cos\left(\psi_u-arctg\dfrac{\omega L-\dfrac{1}{\omega C}}{R_1}\right).$

Варто звернути увагу на те, що в кожному окремому випадку похідна миттєвого струму на момент комутації $\dfrac{d\,i_1(0_+)}{d\,t}$ зазвичай не набуває тих самих значень, а залежить від початкової фази вхідної напруги та співвідношень поміж параметрами елементів заданого кола.

Водночас значення похідної $\dfrac{d\underline{I}_{m_1}(0_+)}{dt}$ є інваріантним щодо вказаних параметрів і завжди дорівнює нулю.

Порівнюючи коефіцієнти обох диференціальних рівнянь (17) і (20), нескладно помітити, що:

$$\underline{A}_2 = a_2;\ \ \underline{A}_1 = a_1 + j2\omega\, a_2;\ \ \underline{A}_0 = a_0 - \omega^2 a_2 + j\omega\, a_1;\ \ \underline{B}_0 = b_0 - \omega^2 b_2 + j\omega\, b_1,$$

де в останньому співвідношенні $b_2 = 0$.

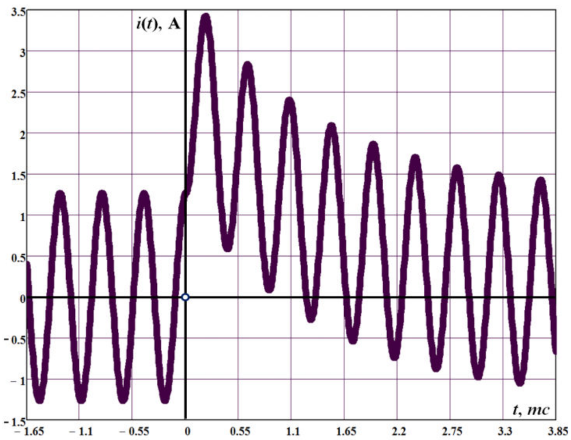
Отже, для заданого за умовою прикладу випадку, коли $n = 2$ і $q = 1$ (одне джерело живлення), відношення між групами відповідних коефіцієнтів диференціальних рівнянь відповідають формулам (6), через що й розв'язки цих рівнянь за зазначених вище початкових умов (18) і (21) не суперечитимуть формулі (3)

$$i_1(t) = \mathrm{Im}\left\{\underline{I}_{m_1}(t)e^{j\omega t}\right\}.$$

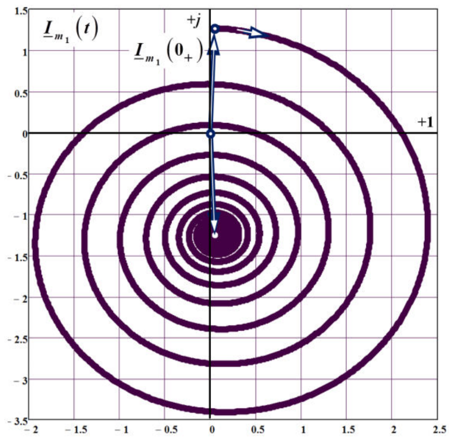
Це означає, якщо тільки адекватним об'єктивно сучасній дійсності виявиться розв'язок $i_1(t)$ задачі Коші, побудованої для заданого електричного кола на основі *класичних* законів Кірхгофа і компонентних співвідношень, то розв'язок $\underline{I}_{m_1}(t)$ задачі Коші, яку можна сформувати і в інший спосіб – на основі *запропонованої* перехідної комплексної схеми та за допомогою законів Кірхгофа і компонентних співвідношень у комплексно-часовій формі, за зазначеною якістю не поступатиметься першому розв'язку й також буде адекватним реаліям перехідного процесу в цьому електричному колі за інших рівних умов.

Прикінцева частина, висновки

Для прикладу на рис. 2 побудовано два графіки, які окремо й передусім у якісній формі відображають той самий перехідний процес. Перший графік (рис. 2, а) – це перехідна хвильова діаграма миттєвого струму $i_1(t)$, другий (рис. 2, б) – часовий годограф [3], побудований на основі миттєвого комплексного струму $\underline{I}_{m_1}(t)$ на комплексній площині.



а)



б)

Рис. 2. Перехідна хвильова діаграма миттєвого струму $i_1(t)$ та часовий годограф миттєвого комплексного струму $\underline{I}_{m_1}(t)$

Як видно з рисунків, обидві математичні моделі є самодостатніми. Зокрема вони явно й однозначно відображають дві характерні риси поточного перехідного процесу: по-перше, істотне, чи не втричі (!), зростання перехідного струму в заданому колі та радикальну зміну характеру вхідного імпедансу кола з ємнісного на індуктивний, по-друге. Водночас, оскільки кожна з моделей виявляє притаманні їй можливості у своєрідний спосіб і різноякісно, варто ці обидві математичні моделі, а відповідно – і обидві форми задачі Коші, сприймати не в протиставленні одна одній за кількістю ймовірно властивих їм вад, але в природному доповнені можливими перевагами, властивими лише кожній з них, незалежно від числа та глибини останніх.

Тільки за такого підходу теорія перехідного процесу в колах синусоїдного струму поступово набуватиме необхідної завершеності та повноти. І тільки за такого підходу викладені в цій роботі наукові результати зможуть найповніше розкрити свою сутність.

Відтак уведене та розроблене поняття перехідної комплексної схеми електричного кола, виявлені й описані істотні властивості та основні принципи її складання, сформульовані в комплексно-часовій формі та обґрунтовані обидва закони Кірхгофа та основні компонентні співвідношення – усе це разом і у своїй єдності створює теоретичний базис символьно-класичного метода, який дозволяє безпосередньо ставити й розв’язувати фундаментальну задачу Коші відмінно від узвичаєної форми в термінах миттєвих комплексних струмів і напруг, чим розширює й посилює аналітичні можливості під час розрахунку та дослідження перехідних процесів у лінійних електричних колах синусоїдного та періодичного несинусоїдного струмів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Електроніка і мікросхемотехніка : у 4-х т. Том 4. Книга 1. Силова електроніка / [за ред. В. І. Сенька]. – К. : Каравела, 2013. – 640 с.
2. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго. – М. : Издат. «Наука», 1965. – 780 с.
3. Ведміцький Ю. Г. Символьно-класичний метод аналізу перехідних процесів в електричних колах / Ю. Г. Ведміцький // Вісник Інженерної академії України. – 2014. – Випуск 2. – С. 42 – 48.
4. Перхач В. С. Теоретична електротехніка. Лінійні кола : підручник / В. С. Перхач. – К. : Вища шк., 1992. – 439 с.
5. Теоретичні основи електротехніки : у 3-х т. : підручник [для студ. техн. спец. вищ. закл. освіти]. Т. 2. Перехідні процеси у лінійних колах із зосередженими параметрами. Нелінійні та магнітні кола / [В. С. Бойко та ін.] ; заг. ред. І. М. Чиженко, В. С. Бойко. – К. : НТУУ “КПІ”, 2008. – 224 с.
6. Теоретические основы электротехники. Т. 2 [в 3-х т.] : учебник [для вузов] / [Демирчян К. С., Нейман Л. Р., Коровкин Н. В., Чечурин В. Л.]. – СПб : Питер, 2003. – 576 с.
7. Johnson D. H. Fundamentals of electrical engineering / D. H. Johnson, J. D. Wise. – Rice University, 1999. – 267 p.
8. Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола: підручник [для студ. вищ. техн. навч. закладів] / [Карпов Ю. О., Ведміцький Ю. Г., Кухарчук В. В., Кацив С. Ш.]. ; за ред. проф. Ю. О. Карпова. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2013. – 456 с.
9. Веников В. А. Переходные электромеханические процессы в электрических системах : [учебн. для электроэнергет. спец. вузов] / В. А. Веников. – М. : Высш. шк., 1985. – 536 с.
10. Рютенберг Р. Переходные процессы в электроэнергетических системах / Р. Рютенберг. – М. : Изд. иностр. литер., 1955. – 716 с.
11. Gardner M. F. Transients in linear systems / M. F. Gardner, J. L. Barnes. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 1942. – 552 p.
12. Ульянов С. А. Электромагнитные переходные процессы в электрических системах / С. А. Ульянов. – М. : «Энергия», 1970. – 520 с.
13. Розенфельд А. С. Переходные процессы и обобщенные функции / А. С. Розенфельд, Б. И. Яхинсон. – М. : «Наука», 1966. – 440 с.

Ведміцький Юрій Григорович — к. т. н., доцент кафедри теоретичної електротехніки та електричних вимірювань.

Кухарчук Василь Васильович — д. т. н., проф., завідувач кафедри теоретичної електротехніки та електричних вимірювань.

Вінницький національний технічний університет.