УДК 519.685

А. А. Шиян, к. ф.-м. н., доц.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СПІЛЬНОЇ ЕКОНОМІЧНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ ЛЮДЕЙ

Побудовано математичний апарат для моделювання спільної економічної поведінки людей та класифікація відносин між типами економічної поведінки людей.

Ключові слова: *інформаційний простір, типи діяльності, спільне управління, оператор.*

Вступ та аналіз літератури

Економічна поведінка людини є основою сучасної економічної теорії [1]. Однак діяльність людей здійснюється колективно, притому переважно в мікроколективах, які часто складаються із декількох осіб. Проте саме такі постановки задач практично не розглядалися в сучасній економічній теорії: увага зосереджена виключно на задачах колективного вибору та формування коаліцій [2, 3].

Метою статті є побудова математичного апарату для моделювання спільної економічної діяльності людей для підвищення ефективності прийняття управлінських рішень. Критеріями досягнення результату слугує відповідність теоретичного прогнозу реальним результатам спільної діяльності заданої сукупності людей.

Постановка задачі

Використовуючи результати [4, 5], де доведено, що довільна діяльність може бути описана як оператор (двокомпонентний абстрактний інформаційний автомат – 2АІА), що діє в спеціально побудованому *інформаційному просторі*, побудувати математичний апарат для моделювання *спільної* діяльності декількох 2АІА.

Опис алгебри відносин між типами 2АІА

Як було показано в [4, 5], діяльність конкретної людини відповідає одному із 16 типів 2АІА, кожен із яких може бути представлений у вигляді 4-компонентного вектора, який має вигляд $\{a,b,c,d\}$. Перші дві компоненти описують програмну функцію даного 2АІА (і належать до інформаційного простору, побудованого до здійснення діяльності), а останні дві – його творчу функцію (і належать, відповідно, до інформаційного простору *після* здійснення діяльності людиною). *Першу* компоненту цього вектора задає полюс дихотомії «узагальнюючий – деталізуючий» програмної функції, а *другу* – конкретний клас інформації, до якого вона належить. *Третя* компонента вектора описує конкретний клас інформації, до якого належить творча функція, а *четверта* задає те, що описує творча компонента інформації стан або процес.

Зазначимо, що внаслідок такого визначення друга і третя компоненти вектора типу 2АІА відрізняються за дихотомією «узагальнюючий – деталізуючий», тому при зміні *цього полюса* 2АІА друга і третя компоненти в записі вектора типу повинні помінятися місцями.

Як випливає з наведеного вище визначення для запису типу 2АІА, кожна компонента вектора типу може набувати двох значень: *0* або *1*. Вибір фіксації конкретних відповідностей для значень змінних – полюсів відповідних дихотомій – для подальшого розгляду неістотний: по суті це означає *довільність* вибору «типу 2АІА, від якого починається відлік». Отже, тип 2АІА як вектор може бути записано як $\{a,b,c,d\}$, де $a,b,c,d=0;1$**.** Позначимо множину всіх 16-ти векторів типів 2АІА через $\{T_i\}$.

Введемо тепер клас операторів, які визначені на множині $\{T_i\}$ і які переводять один тип 2АІА у *цілком визначений* інший тип 2АІА. Помічаємо, що цей клас операторів може бути представлений як покомпонентне додавання до вектора типу *певного* 4-компонентного вектора, який є представленням відповідного оператора. Додавання повинне проводитися за *mod 2*. Отже, компоненти всіх цих векторів утворюють в алгебраїчному сенсі *поле* із двох елементів *0* і *1* [6].

Базис цього представлення операторів утворюють *чотири* вектори, які можна записати як $e_1=\{1,0,0,0\}$, $e_2=\{0,1,0,0\}$, $e_3=\{0,0,1,0\}$, $e_4=\{0,0,0,1\}$.

Помічаємо, що існує всього лише 16 різних операторів, які переводять один тип 2АІА в інший: окрім описаних вище базисних векторів та нульового вектора $e_0=\{0,0,0,0\}$ (тотожне перетворення), це: $e_5= e_1+ e_2$, $e_6=e_1+ e_3$, $e_7=e_1+ e_4$, $e_8=e_2+ e_3$, $e_9=e_2+ e_4$, $e_{10}=e_3+ e_4$, $e_{11}=e_1+ e_2+ e_3$, $e_{12}=e_1+ e_2+ e_4$, $e_{13}=e_1+ e_3+ e_4$, $e_{14}=e_2+ e_3+ e_4$, $e_{15}=e_1+ e_2+ e_3+ e_4$.

Після дії оператора e_1 змінюється полюс дихотомії «узагальнюючий – деталізуючий» в записі типу 2АІА, і тому ми повинні поміняти місцями узагальнюючі й деталізуючі класи інформації в записі вектора типу (тобто поміняти місцями друге і третє числа). З цієї причини для операторів e_5 — e_{15} операцію «переведення типу в тип» – тобто «закон додавання» для компонент інформації – визначимо так.

1. Оператор e_1 діє *першим,* змінюючи при цьому полюс дихотомії «узагальнюючий – деталізуючий» в записі типу 2АІА: «0» на «1» або навпаки, відповідно, внаслідок чого *другі і треті компоненти вектора типу міняються місцями*.
2. А вже після цього має місце дія інших базисних операторів (тобто відбувається підсумовування з іншими операторами e_i при i>1 для вектора типу).

Внаслідок цієї умови сукупність операторів $e_0 – e_{15}$ розглядатиметься надалі як сукупність впорядкованих операторів в значенні В.П. Маслова [7].

Отже, отримана система *операторів* $\{e_i\}$, які діють на вектори з множини $\{T_i\}$. Структуру цієї множини операторів $\{e_i\}$ задає наступна сукупність теорем.

Теорема 1. Сукупність операторів $\{e_i\}$ утворює некомутативну групу.

Доведення очевидне: оскільки, наприклад, $e_7\bullet e_{13}\neq e_{13}\bullet e_7$.

Теорема 2. Група $\{e_i\}$ має *11* циклічних підгруп порядку *2*.

Теорема 3. Група $\{e_i\}$ розпадається на *3* види комплексів, елементи яких мають такі властивості: $e_0\bullet e_0=e_0$ (*1* комплекс), $e_i\bullet e_i=e_i^2=e_0$ (*11* наборів комплексів – циклічних підгруп порядку *2*, такі оператори називатимемо «симетричними»), і $e_i^4=e_0$ (*4* набори комплексів –

циклічних підгруп порядку *4*, такі оператори називатимемо «асиметричними»).

Теорема 4. Група $\{e_i\}$ є векторним простором, розмірність якого дорівнює *4*.

Наслідок. Якщо описано дії будь-яких *чотирьох* лінійно незалежних операторів з $\{e_i\}$, то дія останніх *11* операторів може бути виражена в термінах дії цих операторів (дія *тотожного* оператора e_0 є тривіальною).

Асиметричні оператори з набору $\{e_i\}$ структурують множину типів 2АІА $\{T_i\}$ таким чином.

Теорема 5. Множина типів 2АІА $\{T_i\}$ кожним із асиметричних операторів розбивається на *4* рівнопотужних непересічних підмножини (*4 орбіти*, які містять відповідно по *4* різних типи 2АІА).

Наслідок. Множина $\{T_i\}$ є сумою чотирьох множин, кожна із яких утворена оператором, що має властивість $e_i^4=e_0$.

Визначення 1. Оператор e_i з $\{e_i\}$, який переводить один тип 2АІА в інший, називатимемо *відношенням* між даними типами 2АІА.

Отже, на множині типів 2АІА $\{T_i\}$ внаслідок наведених вище теорем існує всього *16* відносин: *1 тотожне* відношення, *11 симетричних* відносин (коли послідовне застосування операторів переходу від типу до типу не виводить за межі цієї пари типів) і *4 асиметричних* відносин (коли послідовним застосуванням цього відношення *4* різних типів 2АІА замикаються в кільце).

Асиметричне відношення e_{13} є виділеним, оскільки саме воно забезпечує найвищий ступінь самопрограмування між парою типів 2АІА. Дійсно, як помічаємо, тільки при такому співвідношенні між цими типами 2АІА творча функція першого типу 2АІА *збігається* із програмною функцією іншого типу 2АІА. Іншими словами, активність першого типу 2АІА другим типом 2АІА сприймається як цілком рівнозначний опис усього навколишнього світу (адже цей, другий тип 2АІА, «бачить» тільки одну компоненту інформації: причому саме ту, яка є творчою для першого типу 2АІА).

Сукупність операторів $\{e_i\}$ можна представити також у вигляді графів – відрізків, що сполучають дві точки (два 2АІА із різними типами). Тоді помічаємо, що асиметричні відносини можуть бути представлені у вигляді *орієнтованих* графів.

Як випливає з визначення операторів $\{e_i\}$, якщо довільний *асиметричний* оператор e_i застосувати двічі, то отримаємо симетричний оператор: $e_i^2=e_8$. Мають місце також такі співвідношення: $e_{12}\bullet e_{13}=e_{13}\bullet e_{12}=e_5\bullet e_6=e_6\bullet e_5=e_0$. Наявність «перехресних» співвідношень $e_{14}\bullet e_5=e_{13}$ і $e_{14}\bullet e_6=e_{12}$ та подібних до них дозволяє виділити відношення e_{14} серед усіх симетричних відносин. При цьому співвідношення $e_{14}\bullet e_5=e_{13}$ внаслідок орієнтованості графа e_{13} приводить до того, що граф e_5 також виявляється орієнтованим (оскільки граф e_{14} є неорієнтованим). Отже, отримуємо теорему.

Теорема 6. Система графів $\{e_i\}$ структурована таким чином: e_0 – кільце (точка), $e_1 – e_4$, $e_7 – e_{11}$, e_{14} , e_{15} – *неорієнтовані* графи (симетричні відносини, причому граф e_{14} є виділеним в плані стикування між собою орбіт, утворених дією асиметричних операторів), e_5 , e_6, e_{12} і e_{13}

– *орієнтовані* графи (причому інформація розповсюджується тільки по графам e_{13} і e_5, а графи e_{12} і e_6 *орієнтовані протилежно* напряму розповсюдження інформації і тому можуть розглядатися як «інформаційні пробки»). Граф e_1 є виділеним, оскільки його застосування приводить до радикальної перебудови вектора представлення типу.

Слова з $\{e_i\}$ як ланцюжки вироблення рішень

Визначення 2. Довільну послідовність операторів з $\{e_i\}$ називатимемо *словом* (послідовність застосування операторів – справа наліво).

Кожне таке *слово* задає ланцюжок вироблення нового рішення. Інакше кажучи, кожне *слово* задає цілком певний ланцюжок розповсюдження нової інформації.

Зауваження. Помічаємо, що «спілкуватися» між собою «на рівних» можуть тільки типи, що володіють одним і тим же полюсом дихотомії «узагальнюючий – деталізуючий». Дійсно, *узагальнюючий* тип реалізує управління «від загального до часткового», тоді як *деталізуючий* тип 2АІА – навпаки, «від часткового до загального» (див. теорему 6).

Досить важливою є та обставина, що одне й те ж *слово* може об'єднувати в деякий шлях *різні* сукупності 2АІА (особливо наочно це видно при представленні операторів у вигляді графів).

Визначення 3. *Слова* на множині заданих типів 2АІА називатимемо *еквівалентними в сенсі здійснення управління*, якщо вони спираються своїми початком і кінцем на фіксовані типи 2АІА (які можуть бути як різними, так і однаковими, - в останньому випадку отримаємо *цикл (кільце)* із 2АІА).

Можна сказати, що слова – це топологічно інваріантні конструкції на множині $\{T_i\}$.

Загальний алгоритм вирішення задач по управлінню соціально-економічною системою довільної природи за допомогою заданої множини 2АІА має такий вигляд.

1. Визначаються *всі типи 2АІА*, які містяться в заданій множині людей (тобто визначаються типи всіх людей в даному колективі).
2. Визначаються *всі типи* операторів e_i, які зв'язують пари різних типів 2АІА, які містяться в заданій множині 2АІА.
3. Вибираються *слова*, які є оптимальними для вирішення поставленої мети управління і прийняття управлінських рішень (тобто *фіксуються* як типи 2АІА для конкретних людей, так і *відносини* між ними.

Відзначимо, що цілі управління в загалом можуть відрізнятися від перерахованих вище: вони визначатимуться конкретним наповненням задачі. Отже, замість того, щоб досліджувати ланцюжки передачі інформації (ланцюжки вироблення нового режиму управління) між конкретними типами 2АІА, тепер можна досліджувати *слова*, які є інваріантними і не залежать вже від вибору конкретних типів.

Інформаційна класифікація конструкцій спільної діяльності

Розглянемо інформаційні характеристики конструкції, яка виникає на множині $\{T_i\}$ за умови максимально повного вироблення нового спільного управління. Інакше кажучи, необхідно знайти конструкцію, в якій задіяні всі 16 типів 2АІА і всі 16 типів відносин між ними і яка максимально пристосована для вироблення нового управління. Така конструкція повинна містити максимальну кількість замкнутих шляхів (циклів), складених із асиметричних операторів. Побудуємо таку конструкцію.

Даний тип 2АІА (той, який «ставить задачу» перед рештою типів 2АІА) формує кільце (цикл) *індивідуального* самопрограмування за допомогою послідовної дії оператора e_{13}.

Дія цього ж оператора e_{13} розбиває множину $\{T_i\}$ ще на 3 кільця (цикли) самопрограмування. Тільки одне із отриманих кілець індивідуального самопрограмування може бути зістиковане із даним типом 2АІА так, щоб утворити єдине ціле, тобто кільце (цикл) *здвоєного* («*діадного*») самопрограмування. Таке кільце вийде, якщо до даного типу 2АІА приєднати за допомогою оператора e_{14} відповідний тип 2АІА разом із тим кільцем (циклом) індивідуального самопрограмування, яке його містить. При цьому кожна пара типів, яка знаходиться в ланках такого «здвоєного» кільця (кільця *діадного* самопрограмування), буде зв'язаною все тим же оператором e_{14}.

Отже, вся множина $\{T_i\}$ розбивається на *два* кільця діадного самопрограмування, одне із яких містить заданий тип 2АІА, а інше – ні.

Два кільця індивідуального самопрограмування, які складають *друге* кільце діадного самопрограмування (тобто те, яке залишилося) можна в свою чергу приєднати до заданого типу 2АІА тільки за допомогою чотирьох різних операторів, що не змінюють у виділеного нами типу 2АІА полюс дихотомії «узагальнюючий – деталізуючий». При цьому приєднання відбувається із тими типами 2АІА, у яких або програмна, або творча функції *збігаються* із відповідними функціями даного типу 2АІА або типу, отриманого з даного за допомогою оператора e_{14} (такий тип називається «*діадним»)*.

При будь-яких інших способах приєднання кілець індивідуального самопрограмування до даного типу 2АІА оптимальної передачі інформації не буде досягнуто (оскільки інформація буде спотворюватися при комунікації даного типу 2АІА із іншими типами 2АІА *в одній і тій же ланці*, тобто діє спільно).

Отже, отримуємо наступну теорему (математичні деталі див., наприклад, в [8]).

Теорема 7. Конструкція на множині типів 2АІА $\{T_i\}$, яка здатна оптимально перетворити нову інформацію, в топологічному сенсі гомотопічно еквівалентна букету із *6* кіл.

Наслідок. Описана в теоремі 7 конструкція диффеоморфна двовимірній сфері із 7 вклеєними плівками Мєбіуса. Число Ейлера для цієї конструкції є $\chi=-5$.

Визначення 4. Введену в теоремі 7 конструкцію називатимемо *соціоном*.

Помічаємо, що в *соціоні* для будь-якого із типів 2АІА наявні *всі можливі* на множині $\{T_i\}$ оператори (тобто всі відносини між типами). Отже, соціон є тим об'єктом, що містить *найдовше*, у якому всі типи 2АІА із $\{T_i\}$ наявні тільки один раз, тобто це найдовший шлях без повторів. У соціоні також реалізований випадок, коли окремі типи 2АІА здійснюють комунікацію із найбільшою кількістю інших типів 2АІА. Отже, соціон є якраз тим об'єктом, який повинен бути утворений для того, щоб виробити всю сукупність можливих режимів (способів, алгоритмів, методів) для здійснення управління в довільній соціально-економічній системі.

Іншими словами, соціон є тим об'єктом, який *тотожний* максимально можливій коаліції в умовах симетричної інформації. Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема 8. «Інформаційна місткість» заданої сукупності людей задається топологічними властивостями фундаментальної групи із слів, які можуть бути складені з типів 2АІА, яким відповідають люди із цієї сукупності, і вона не може бути більше за інформаційну місткість соціону.

Зауваження. Отримані результати можуть бути отримані також «геометричним» способом, коли відповідні оператори представляються у вигляді графів.

Цікаво, що, як випливає з теореми 7, оптимальний для функціонування соціону розгалужений граф може бути описаний у вигляді об'єкту, в якому є 1 «*вхід»* – асиметричний оператор, 1 «*вихід»* – асиметричний оператор і 5 неорієнтованих ребер – 5 симетричних операторів.

Помітимо, що загалом, будь-який тип 2АІА може функціонувати у складі соціону тільки тоді, коли на нього спирається граф із 7±2 розгалуженнями-ребрами. Це твердження є, ймовірно, першим *замкнутим* математичним доведенням для відомого в психології і менеджменті факту, що комунікація між людьми можлива тільки між 7±2 комунікантами [9]. Також це може служити варіантом доведення гіпотези Інгве [10].

Застосування та апробація

Методика використання отриманих результатів описана в [4,11 – 14].

Найбільш повно сьогодні описано спільну управлінську діяльність *пар* людей, тобто описано прояви *окремих* операторів e_i із $\{e_i\}$ [11– 13]. Так, здійснено теоретичні прогнози для рівня ефективності спільної діяльності політиків Л. Кучми та Д. Табачника [11, 12], М. Шаймієва та В. Путіна [13] та ще взаємодії між іншими політиками [14], завдяки яким вдалося описати цілий ряд специфічних ефектів при їх спільній управлінській діяльності.

Також розроблено *слова* для здійснення ефективної спільної діяльності людей, які обіймають *декілька* операторів. Наприклад, такий ефективний ланцюжок для *цілеспрямованого* управління конкретною людиною був *успішно апробований* [11, 12]. Уже кілька років в одній із приватних фірм м. Вінниця для організації управління конкретною людиною – директором фірми – застосовується *слово* $e_{13}\bullet e_4$, яке було запропоноване як оптимальне при аналізі конкретного складу типів 2АІА для співробітників фірми. Необхідність цього була викликана тією обставиною, що типи *замовника* (людини, яка *задає* керування) і директора фірми пов'язані асиметричним відношенням e_6, тобто *замовник* не має ніякої можливості передати інформацію своєму директору (інформація може йти тільки від директора до нашого *замовника*). Для управління застосовано *третю* людину. Цікаво, що директор фірми навіть не підозрює, що він вже багато років є «мішенню» для управління (тобто управління відбувається настільки «природно» та комфортно для нього, що він вважає його ... *власними* рішеннями). Відзначимо, щодо морально-етичних аспектів цієї проблеми із замовником нами було спеціально зроблене застереження.

Висновки

1. У статті побудовано математичний апарат для моделювання спільної економічної поведінки людей.

2. Побудована класифікація відносин між типами економічної поведінки людей.

3. Застосування отриманого в статті формалізму щодо опису способу прийняття спільних управлінських рішень конкретними людьми опубліковано в [11 – 14]. Теоретичні результати підтвердилися.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Mas-Collel A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic Theory. Oxford: Oxford University Press, 1995. – 977 p.
2. Нуреев Р.М. Общественный выбор: теория и практика. – М.: Изд-во ГУ ВШЭ, 2005. – 532 с.
3. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. – М.: Мир, 1991. – 464 с.
4. Шиян А.А. Економічна кібернетика: вступ до моделювання соціальних і економічних систем. – Львів: «Магнолія 2006». – 2007. – 228 с.
5. Шиян А.А. Информационное пространство и классификация стратегий управленческой деятельности в теории игр и принятия решений // Інформаційні технології та комп’ютерна інженерія. – 2007. – № 3 (10). – С. 131 – 139.
6. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. – М.: Наука,1976. – 648 с.
7. Маслов В.П. Операторные методы. – М.: Наука,1973. – 544 с.
8. Рохлин В.А., Фукс Д.Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. – М.: Наука, 1977. – 488 с.
9. Miller G.A. The Magic Number Seven Plus or Minus Two: Some Limits on Our Capacity for Processing Information // Psychology Review, 1956. – March. – P. 81 – 97.
10. Словарь по кибернетике / под ред. В.С. Михалевича. – К.: Гл. ред. УСЭ им. М.П. Бажана, 1989. – С. 751.
11. Шиян А.А. О роли коммуникантов в обеспечении психологического комфорта: от стресса к суициду // Прикладная психология (Москва). – 2000. – № 4. – С. 67 – 79.
12. Курносов Ю.В., Конотопов П.Ю. Аналитика: методология, технология и организация информационно-аналитической работы. – М.: РУСАКИ, 2004. – 512 с.
13. Мингазов Р., Киямов И. Президентский характер: личность М. Ш. Шаймиева в ракурсе современных социальных технологий // Татарстан. – 2003. – №1. – С. 4 – 9.
14. Шиян А.А. Соціально-психологічні портрети політиків: О.О. Мороз, Н.М. Вітренко та В.П. Горбулін // Нова політика. – 1998. – №4. – С. 24 – 28.

Шиян Анатолій Антонович – доцент кафедри проектування медико-біологічної апаратури, LMaximus@yandex.ru, http://soctech.narod.ru.

Вінницький національний технічний університет