УДК 681.3:621.375

О. Д. Азаров, д. т. н., проф.; О. О. Решетнік; С. В. Богомолов

СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ З ВАГОВОЮ НАДЛИШКОВІСТЮ ДЛЯ ШВИДКОДІЮЧИХ АЦП ПОСЛІДОВНОГО НАБЛИЖЕННЯ І ЦАП, ЩО САМОКАЛІБРУЮТЬСЯ

Наведено огляд систем числення із ваговою надлишковістю. Проаналізовано теоретико-числові властивості систем числення із ваговою надлишковістю. Проаналізовано можливість реалізації ЦАП і АЦП із ваговою надлишковістю на базі ненадлишкових ЦАП. Показано можливість використання надлишкових систем числення із ваговою надлишковістю та штучним базисом на основі двійкових рядів для побудови надлишкових ЦАП на основі ненадлишкових двійкових ЦАП без створення спеціалізованої елементної бази.

Ключові слова: *АЦП, НПСЧ (надлишкові позиційні системи числення), СЧВН (системи числення із ваговою надлишковістю).*

Вступ

Переважна більшість сучасних перетворювачів форми інформації (ПФІ) у вигляді АЦП і ЦАП реалізується з використанням класичної двійкової системи числення [1 – 5]. Водночас у ряді випадків побудова АЦП і ЦАП на базі систем числення із ваговою надлишковістю [9] дозволяє комплексно вирішувати проблеми підвищення швидкодії й точності АЦП, а також ЦАП, побудованих на низькоточній елементній базі.

Принциповим недоліком використання двійкової системи числення в ПФІ є те, що наявність інструментальних статичних похибок призводить до появи в характеристиці перетворення ЦАП зон, в яких вихідну аналогову величину не можна набрати жодною кодовою комбінацією. Такі зони називаються розривами характеристики перетворення [1, 2, 5, 7, 8]. Це, у свою чергу, призводить до виникнення в АЦП, побудованому на такому ЦАП, так званих пропусків кодів [9]. Для реалізації АЦП без пропусків кодів треба використовувати ЦАП із ваговою надлишковістю, який не має розривів характеристики перетворення. Такий підхід, до того ж, спрощує калібрування ваг розрядів і дозволяє формувати результат перетворення в АЦП одночасно з компенсацією динамічних похибок, за рахунок цього скорочується час перетворення й підвищується швидкодія.

Актуальність

До розривів характеристики перетворення в АЦП порозрядного наближення призводить як наявність інструментальних статичних похибок (відхилення ваг розрядів) у ЦАП, так і динамічних похибок, коли тривалість такту під час порозрядного врівноваження є недостатньою для завершення перехідних процесів.

Використання вагової надлишковості при побудові ЦАП і АЦП дозволяє формувати нерозривну характеристику перетворення за наявності не тільки статичних, а й динамічних похибок, що виникають в АЦП під час порозрядного врівноваження.

Слід зазначити, що наведений підхід дозволяє підвищувати точність багаторозрядних АЦП і ЦАП, побудованих на неточних елементах (похибки 5% – 10%), шляхом самокалібрування ваг розрядів [9]. Крім того є можливість значного (на один, два порядки) підвищення швидкодії АЦП порозрядного врівноваження. Проте рівень дослідження систем числення з ваговою надлишковістю (СЧВН), а також особливостей їх застосування в техніці АЦП і ЦАП є недостатнім. Тому аналіз теоретико-числових властивостей СЧВН, спрямованих на підвищення швидкодії й точності аналого-цифрового і цифро-аналогового перетворення на основі застосування різних видів СЧВН, є актуальним.

Мета

Метою статті є аналіз і систематизація систем числення із ваговою надлишковістю, що використовуються в ПФІ для підвищення швидкодії і точності.

Задачі

Згідно із зазначеною метою формуються такі задачі:

1) огляд систем числення із ваговою надлишковістю й оцінювання рівня цієї надлишковості залежно від їх різновидів;

2) аналіз теоретико-числових властивостей СЧВН;

3) аналіз можливостей реалізації ЦАП і АЦП із ваговою надлишковістю на базі ненадлишкових двійкових ЦАП.

Розв’язання задач

Системою числення, або нумерацією, [11] є сукупність прийомів і правил для найменування та позначення чисел. Набір ваг розрядів системи числення – це базис $\{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_{n-1}\}$. Алфавіт – це множина значень, які може приймати кожен розряд системи числення $a \in \{0,1\}$, $a \in \{-1,1\}$ або $a \in \{-1,0,1\}$. Таким чином, система числення може задаватись через основу системи числення, базис та алфавіт. Так, класична двійкова система числення має основу 2, базис 1; 2; 4; ... 2^{n-1} та алфавіт {0, 1}. Залежно від закону задання ваги і-го розряду можна поділити системи числення на системи з природними і штучними базисами. У природному базисі існує постійне співвідношення між вагами розрядів – $\alpha = \frac{Q_i}{Q_{i-1}}$, причому це співвідношення є основою системи числення. У системах числення із штучним базисом вага кожного розряду формується за певним законом із ваг молодших розрядів (наприклад, як сума двох попередніх розрядів у системі числення Фібоначі).

У позиційних системах числення із дробовими вагами розрядів («золоті» p- і s-пропорції) будь-яке дійсне число можна представити у вигляді:

$$A^* = \sum_{i=-\infty}^{n-1} a_i \alpha^i ,$$

де a_i – цифра в i-му розряді, α – основа системи числення. Проте в техніці перетворення інформації цей вираз є неприйнятним, оскільки припускає наявність нескінченно довгої розрядної сітки. На практиці довжина розрядної сітки обмежена [9]. Тому в цьому випадку доцільно використовувати вираз для натуральних чисел:

$$N^* = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \alpha^i .$$

У СЧВН із природним базисом виникають проблеми із точним зображенням цілих чисел. Цю особливість необхідно враховувати при побудові ПФІ при реалізації цифрової частини. Водночас неточність представлення цілих чисел аж ніяк не впливає на точність перетворення аналог-код або код-аналог. Це є принциповим аргументом на користь СЧВН, оскільки в АЦП або ЦАП незалежно від того, яка в них використовується система числення завжди є інструментальні похибки на рівні половини молодшого розряду.

Суть вагової надлишковості проявляється в тому, що сума ваг молодших розрядів більша або в крайньому випадку дорівнює вазі старшого розряду (вагова надлишковість проявляється таким чином як у системах із природнім базисом, так і в системах із штучним базисом):

$$\sum_{j=0}^{j=i-1} Q_j \geq Q_i \; .$$

При цьому абсолютна вагова надлишковість визначається як:

$$\Delta Q_i = \sum_{j=0}^{j=i-1} Q_j - Q_i \; .$$

Поняття відносної вагової надлишковості визначає рівень надлишковості для статики. Рівень вагової надлишковості у статиці показує можливий сумарний рівень відхилень ваг розрядів, при якому характеристика перетворення залишається нерозривною:

$$\delta Q_i = \frac{\sum_{j=0}^{j=i-1} Q_j - Q_i}{\sum_{j=0}^{j=i} Q_j} \; .$$

За умови постійності α для систем числення із природнім базисом справедливе таке співвідношення:

$$\delta Q_i \approx \frac{2-\alpha}{\alpha} \; .$$

Для динаміки, коли мають місце короткочасні зміни ваги розряду в процесі врівноваження, використовується поняття приведеної відносної вагової надлишковості [9]:

$$\tilde{\delta} Q_i = \frac{\sum_{j=0}^{j=i-1} Q_j - Q_i}{Q_i} \; .$$

Отже, динамічна похибка формується як внесок від одного розряду. Динамічна похибка першого роду існує короткий відрізок часу (протягом одного або декількох тактів).

Варто зазначити, різні рівні вагової надлишковості беруть участь у коригуванні статичних і динамічних похибок. Для коригування статичних похибок, значення яких зафіксовано і не змінюється протягом певного часу, використовується відносна вагова надлишковість, яка пропорційно відображається з усіх розрядів АЦП або ЦАП під час перетворення, таким чином статична похибка формується як сума, внеском до якої є всі розряди.

СЧВН можна формувати як на основі природного, так і на основі штучного базису. До СЧВН із природним базисом належать системи числення «золотих» p- та s-пропорцій або НПСЧ [9]. Такі системи числення мають основу і сталий рівень вагової надлишковості. До СЧВН із штучним базисом належать система числення Фібоначі, деякі двійково-десяткові коди (ДДК) та описані нижче СЧВН на основі двійкових рядів. Варто зазначити, що ДДК широко використовуються у вимірювальній техніці для зручного представлення результатів вимірювання у десятковій системі числення. Для штучного базису не можна використовувати поняття основи системи числення, оскільки відношення між вагами сусідніх розрядів не є сталим.

Рівень вагової надлишковості у СЧВН із природним базисом залежить від значення основи α (рис. 1 а). У табл. 1 наведено значення відносної вагової надлишковості для різних α у випадку природного базису.

Таблиця 1

α	2,00	1,90	1,80	1,70	1,618	1,60	1,50	1,40
δQ_i (%)	0	5,26	11,11	17,65	23,62	25,00	33,33	42,86
$\widetilde{\delta} Q_i$ (%)	0	11,11	24,99	42,86	61.81	66.66	99.99	149.94

З таблиці 1 видно, що $\delta Q_i < \widetilde{\delta} Q_i$, тому для компенсації динамічних похибок є більше можливостей, ніж для коригування статичних.

У СЧВН порівняно з двійковою системою числення подовжується розрядна сітка [9]. Ступінь подовження визначається коефіцієнтом подовження розрядної сітки (рис. 1 б):

$$\gamma_n = \frac{ln 2}{ln \alpha}.$$

У табл. 2 наведено значення коефіцієнтів γ_n для окремих α із природного базису. Варто зазначити, що для $\alpha = 1$ маємо $\gamma_n = \frac{2^n}{n}$. Наведена формула для γ_n справедлива для випадку, коли двійковий та надлишковий діапазон точно збігаються. При конкретному числі розрядів системи числення така формула дає лише приблизний результат. На практиці доцільно враховувати, що реальний коефіцієнт подовження може бути більшим (або меншим) на значення 1/n (n – кількість двійкових розрядів), проте діапазон СЧВН при цьому збільшується (або зменшується). Це зумовлено тим, що діапазон представлення чисел СЧВН може бути більшим або меншим за діапазон представлення чисел у двійковій системі числення, проте дуже рідко діапазони повністю збігаються. При виборі СЧВН треба враховувати рівень вагової надлишковості та реальний коефіцієнт подовження розрядної сітки. Водночас коефіцієнт подовження розрядної сітки для СЧВН зі штучним базисом визначається числом розрядів.

Таблиця 2

α	1,20	1,30	1,414	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90	2,00
γ_n	3,80	2,64	2,00	1,71	1,48	1,31	1,18	1,08	1,00

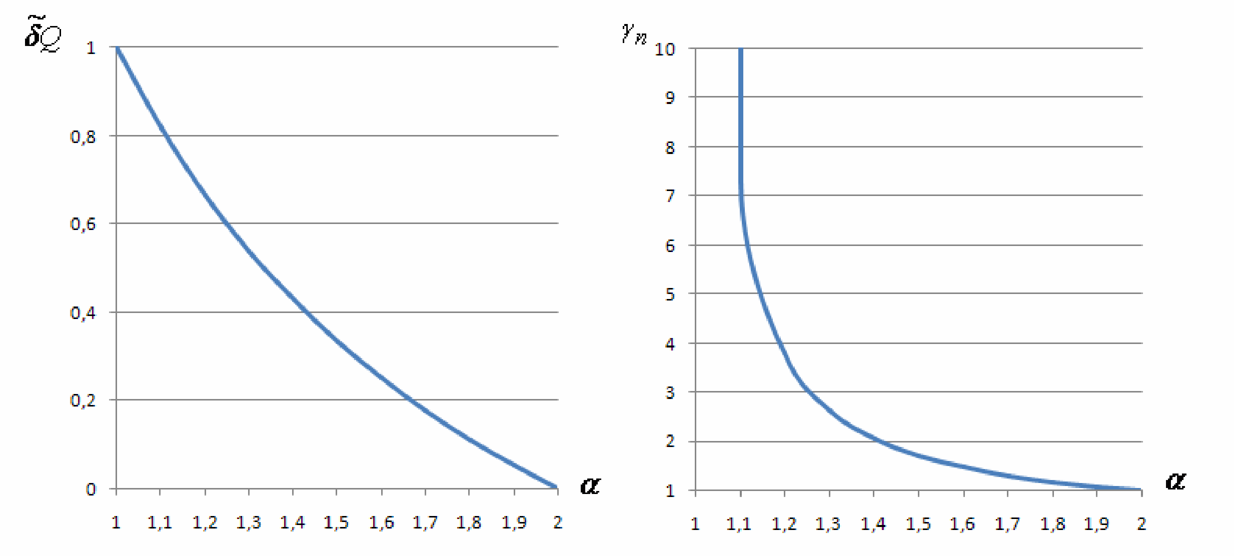

Рис. 1. Залежність додаткових параметрів СЧВН від α : а) рівень відносної вагової надлишковості, б) коефіцієнт подовження розрядної сітки

Слід зазначити, що побудова ПФІ на основі СЧВН вимагає створення специфічної елементної бази для кожної окремої СЧВН. Водночас, незважаючи на можливість використання при цьому спрощеної технології виготовлення аналогових вузлів АЦП і ЦАП, це може стати перешкодою на шляху технічної реалізації.

Для подолання цього техніко-економічного бар'єру при практичній реалізації ПФІ автори пропонують кілька підходів щодо побудови ЦАП із ваговою надлишковістю на основі класичної ненадлишкової двійкової системи числення [12]. Останнє дає можливість проектувати надлишкові ЦАП і АЦП з покращеними статичними і динамічними характеристиками на базі традиційних двійкових ЦАП та не вимагає створення оригінальної елементної бази. Приклади формування надлишкових рядів на базі двійкових рядів та їх характеристики наведено в табл. 3:

Таблиця 3

№	Ряд	Відносна вагова надлишковість, ∂Q		Коефіцієнт подовження розрядної сітки, γ_n	Питома вагова надлишковість, γ_E
		min	max		
1	1; 1; 2; 2; 4; 4; ... 2^{n-1}; 2^{n-1};	0,27	0,49	2	0,14/0,25
2	1; 1,5; 2; 3; 4; 6; ... 2^{n-1}; $1.5\cdot 2^{n-1}$;	0,39	0,43	2	0,19/0,22
3	1; $\sqrt{2}$; 2; $2\sqrt{2}$; 4; $4\sqrt{2}$; ... 2^{n-1}; $2^{n-1}\sqrt{2}$;	0,414		2	0,207
4	1; 2; 3; 4; 8; 12; ... 2^{n-2}; 2^{n-1}; $2^{n-2}+2^{n-1}$.	0,19	0,33	1,5	0,13/0,17/0,22

Якщо ж відношення між сусідніми членами базису не є сталим, то коефіцієнт подовження розрядної сітки можна визначити як відношення відповідної кількості надлишкових розрядів до кількості двійкових розрядів за умови однаковості діапазонів зображення чисел [9].

Вибір типу СЧВН доцільно здійснювати, використовуючи питому вагову надлишковість $\gamma_{ПВН}$, яка визначається як відношення рівня відносної вагової надлишковості до коефіцієнту подовження розрядної сітки:

$$\gamma_{ПВН} = \frac{\delta Q}{\gamma_n} = \frac{\left(\frac{\alpha^i - 1}{\alpha - 1} - \alpha^i\right) ln(\alpha)}{\left(\frac{\alpha^i - 1}{\alpha - 1} + \alpha^i\right) ln(2)}$$

та приведену питому вагову надлишковість:

$$\tilde{\gamma}_{ПВН} = \frac{\tilde{\delta} Q}{\gamma_n} = \frac{\left(\frac{\alpha^i - 1}{\alpha - 1} - \alpha^i\right) ln(\alpha)}{\alpha^i \, ln(2)}.$$

Проаналізуємо наведені функції на екстремуми на проміжку від 1 до 2. Продиференціювавши функції, отримаємо наступні рівняння:

$$\gamma'_{ПВН} = \frac{1}{ln(2)}\left(\left(\left(\alpha^i \frac{i}{\alpha} - 2\alpha + 1\right)\frac{ln(\alpha)}{\alpha^{i+1}-1} + \frac{\alpha^i - \alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha(\alpha^{i+1}+1)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\frac{(\alpha^i - \alpha^2 + \alpha - 1)ln(\alpha)}{(\alpha^{i+1}+1)^2}\alpha^{i+1}\frac{i+1}{\alpha}\right)\right)\right),$$

$$\tilde{\gamma}'_{ПВН} = \left(\alpha^i \frac{i}{\alpha(\alpha-1)} - \frac{\alpha^i - 1}{(\alpha-1)^2} - \alpha^i \frac{i}{\alpha}\right)\frac{ln(\alpha)}{\alpha^i\, ln(2)} +$$

$$+ \frac{\dfrac{\alpha^i - 1}{\alpha - 1} - \alpha^i}{\alpha^{i+1}\, ln(2)} - \left(\frac{\alpha^i - 1}{\alpha - 1} - \alpha^i\right)\frac{ln(\alpha)i}{\alpha^{i+1}\, ln(2)}.$$

Коренями рівняння є найоптимальніші значення α для статики $\alpha = 1{,}375$ та динаміки $\alpha = 1{,}1575$. Нормувавши кожну функцію по власному екстремуму, можна знайти точку перетину, в якій динамічні та статичні характеристики збалансовано $\alpha = 1{,}2553$.

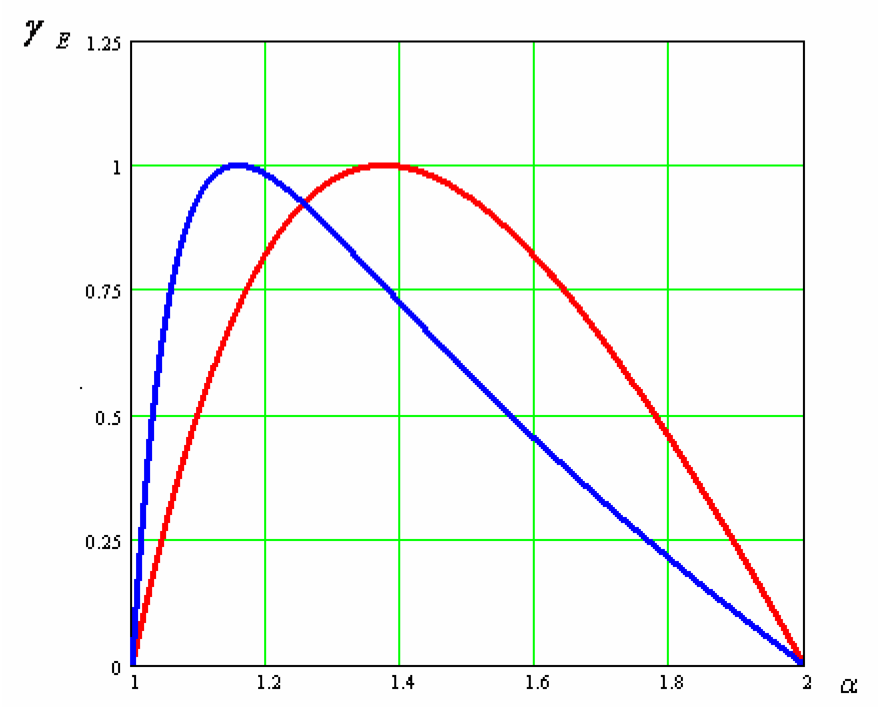

Рис. 2. Залежність питомої вагової надлишковості від α

Аналізуючи наведені графіки (рис. 1 – 2), легко зробити висновок, що зоною оптимуму для СЧВН на основі природного базису є значення основи від 1,2 до 1,6. Проте в межах значення $1{,}2 \le \alpha < 1{,}4$ коефіцієнт подовження розрядної сітки різко зростає із зменшенням α. А в межах від 1,4 до 1,6 коефіцієнт подовження залишається меншим за два.

Розглянуті СЧВН зі штучним базисом на основі двійкової системи числення мають коефіцієнт подовження розрядної сітки 2. При цьому рівень вагової надлишковості таких систем може досягати δQ=0,4 – 0,5. Перевагою наведених систем числення є можливість побудови ПФІ з ваговою надлишковістю на їх основі без створення спеціалізованої елементної бази.

Використання СЧВН на основі двійкових рядів дозволяє будувати надлишковий ЦАП на базі ненадлишкових двійкових ЦАП. Розглянемо структурну реалізацію такого ЦАП (рис. 3) на прикладі базису 1; $\sqrt{2}$; 2; $2\sqrt{2}$; 4; $4\sqrt{2}$; ... 2^{n-1}; $2^{n-1}\sqrt{2}$. ЦАП містить два двійкових

ЦАП, суматор аналогових сигналів і масштабний блок. Виходи ЦАП підключено до суматора аналогових сигналів, причому один із ЦАП підключено через спеціальний масштабний блок М (у цьому випадку коефіцієнт передачі $\sqrt{2}$). Входи двійкових ЦАП під'єднуються до зовнішньої вхідної шини надлишкового ЦАП по черзі, в порядку зростання ваг розрядів.

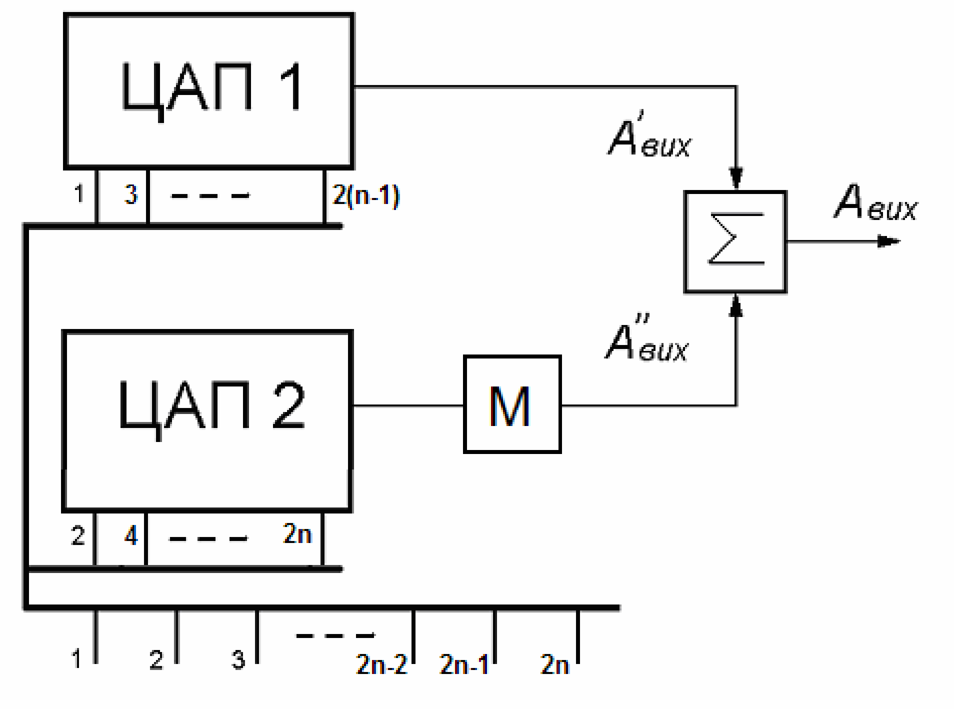

Рис. 3. Надлишковий ЦАП на базі двох двійкових ненадлишкових ЦАП

Отже, використання СЧВН на основі двійкових рядів дозволяє будувати надлишкові ЦАП на базі двійкових ненадлишкових ЦАП, які не мають розривів передатної характеристики навіть за наявності відхилень ваг розрядів.

Висновки

1. Здійснено огляд систем числення із ваговою надлишковістю (СЧВН) як з природним, так і зі штучним базисом. Показано, що для СЧВН зі природним базисом значення основи системи числення α біля точки 1,37 дають найбільшу ефективність. Розглянуті СЧВН із штучним базисом на основі двійкових рядів мають коефіцієнт подовження розрядної сітки 2. При цьому рівень вагової надлишковості таких систем може сягати δQ=0,4 – 0,5, що відповідає зоні оптимуму для СЧВН з природним базисом.

2. Показано можливість використання надлишкових систем числення із ваговою надлишковістю та штучним базисом на основі двійкових рядів для будови надлишкових ЦАП на основі ненадлишкових двійкових ЦАП без створення спеціалізованої елементної бази. У ряді випадків можливе отримання базису зі сталим відношенням між вагами сусідніх розрядів для таких систем числення.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Азаров О.Д., Архипчук О.А., Захарченко С.М. Високолінійні порозрядні АЦП з ваговою надлишковістю для систем реєстрації і оброблення сигналів. Монографія. – Вінниця: УНІВЕРСУМ – Вінниця, 2005. – 125 с.

2. Микроэлэктронные цифро-аналоговые и аналого-цифровые преобразователи информации / Под ред. В. Б. Смолова. – Л.: Энергия, 1976. – 336 с.: ил.

3. А. с. 1231609 СССР, МКИ^3 Н03М1/26. Аналого-цифровой преобразователь / А. П. Стахов, А. Д. Азаров, В. Я. Стейскал, О. В. Конючевский (СССР). – № 3790665/24–24; заявл. 18.09.84; опубл. 15.05.86, Бюл. №18.

4. А. с. 1221750 СССР, МКИ^3 Н03М1/26. Аналого-цифровой преобразователь / А. П. Стахов, В. И. Моисеев, А. Д. Азаров, В. Я. Стейскал, Т. Н. Васильева (СССР). – № 3782076/24–24; заявл. 15.08.84; опубл. 30.03.86, Бюл. №12.

5. Полупроводниковые кодирующие и декодирующие преобразователи / Под ред. В.Б. Смолова и Е.А. Смирнова. – Л.: Энергия, 1967. – 312 с.: ил.

6. Азаров О.Д., Коваленко О.О. Обчислювальні АЦП і ЦАП, що самокалібруються, для систем цифрового обробляння аналогових сигналів: Монографія / Під заг. ред. О.Д. Азарова. – Вінниця: УНІВЕРСУМ – Вінниця, 2006. – 147 с.

7. Галелюка И. Как виртуальная плата ADIsimADC™ моделирует поведение преобразователей данных // ЭКис. – 2006. – №6. – С. 8 – 11.

8. Грушвицкий Р. И. и др. Аналого-цифровые периферийные устройства микропроцессорных систем– Л.: Энергоатомиздат, 1989. – 160 с.: ил.

9. Азаров О.Д. Основи теорії аналого-цифрового перетворення на основі надлишкових позиційних систем числення. Монографія. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2004. – 260 с.

10. Островерхов В. В. Динамические погрешности аналого-цифровых преобразователей. – Л.: Энергия, 1975. – 176 с.: ил.

11. Поспелов Д.А. Арифметические основы вычислительных машин дискретного действия. Учеб. пос. –М.: – Высш. школа, 1970. – 308 с.: ил.

12. Азаров О.Д., Решетнік О.О., Гарнага В.А. Методи побудови ЦАП із ваговою надлишковістю на базі двійкових ЦАП // Проблеми інформатизації та управління: Зб. наук. праць. – Київ, 2006 . – №3. – С. 5 – 11.

Азаров Олексій Дмитрович – д. т. н., професор, директор інституту інформаційних технологій та комп’ютерної інженерії, завідувач кафедри обчислювальної техніки; e-mail: azarov@lili.vstu.vinnica.ua

Решетнік Олександр Олександрович – аспірант кафедри обчислювальної техніки; e-mail: de_gratnik@rambler.ru

Богомолов Сергій Васильович – магістр кафедри обчислювальної техніки.
Вінницький національний технічний університет.