

**А. П. Мотайло, канд. техн. наук**  
**БАЗИСИ БІПІРАМІДИ**

*Робота присвячена вивченню питання інтерполяції функцій методом скінченних елементів в області чотирикутної біпіраміди. Основною задачею цього дослідження є отримання загальних формул скінченно-елементних базисів біпіраміди та проведення аналізу апроксимаційних властивостей базисних функцій на цьому багатограннику.*

*У цій роботі біпіраміда розглядається як скінченний елемент, який отримано з октаедра в результаті лінійних деформацій його півосей. В залежності від кількості напрямів деформацій біпіраміда може мати один/два/три рухомі вузли. Такий спосіб утворення біпірамід є наслідком пристосування решіток тетрадрально-октадральної структури до меж областей, які мають складну геометричну форму.*

*У роботі отримано загальні формули для базисів біпіраміди з сімома та шістьма вузлами інтерполяції, які є параметричними функціями трьох змінних. Значення параметрів відповідають коефіцієнтам видовження/стиснення півосей біпіраміди та ваговому коефіцієнту для функцій шестивузлового базису.*

*Для функцій базисів біпіраміди з сімома та шістьма вузлами інтерполяції вивчено геометричні властивості функцій, які асоційовано з вершинами багатогранника. Вказані функції представлені поверхнями нульового рівня. Визначено залежність типу поверхонь від значень параметрів базисних функцій біпіраміди.*

*У роботі досліджено апроксимаційні властивості функцій семивузлового базису біпіраміди. Критерієм якості апроксимації обрано мінімальний слід матриці жорсткості на цьому багатограннику. Знайдено критичні значення параметрів видовження/стиснення півосей біпіраміди, які доставляють мінімум функції сліду матриці жорсткості біпіраміди з сімома вузлами інтерполяції. Додатково отримано інтервальні оцінки для параметрів функцій семивузлового базису біпіраміди, які визначають межі відхилення скінченного елемента в формі біпіраміди від октаедра.*

*Перспективою подальших досліджень є математичне обґрунтування застосування біпірамід в методі скінченних елементів, визначення показників якості біпіраміди, які використовують у системах скінченно-елементного аналізу для асиметричних 3D-елементів, отримання кубатурних формул.*

**Ключові слова:** *скінченний елемент, октаедр, біпіраміда, вузли інтерполяції, базис, базисні функції, метод конденсації, матриця жорсткості.*

### Вступ

Як відомо, метод скінченних елементів (МСЕ) є широко використовуваним при розв'язанні інженерних задач механіки, теорії пружності, теорії поля тощо. Сучасні програмні комплекси, які реалізують МСЕ, дозволяють обирати скінченні елементи (СЕ), задавати граничні умови, змінювати порядок точності розв'язків, керувати часом обчислень. При цьому в деяких випадках неможливо отримати наблизений розв'язок, який би задовольнив задану точність, або час обчислень перевищує припустимі межі. Постійне зростання складності математичних моделей реальних станів та процесів потребує розробки все більш ефективних алгоритмів чисельного аналізу та збільшення об'єму пам'яті обчислювальної техніки.

Одним із способів оптимізації скінченно-елементних розрахунків є корекція дискретної моделі, іноді шляхом вибору СЕ, які не представлені в бібліотеках програмного забезпечення МСЕ. Зокрема, в тривимірному просторі використовують решітки тетрадрально-октадральної структури, які при розв'язанні задач теорії поля є ефективнішими за часовою складністю порівняно з тетрадральними решітками, про що свідчать публікації [1, 2].

Очевидно, що умова дискретизації 3D області складної геометричної форми решіткою, яка містить лише правильні багатогранники, не може бути виконана. Деякі вузли доводиться виносити на межу області, тоді октаедри перетворюються на біпіраміди. Отже, актуальною є задача вивчення умов апроксимації функцій МСЕ в області біпіраміди.

### Аналіз попередніх публікацій

У роботі [3] розглядається чотирикутна біпіраміда яка є неправильним багатогранником та може бути отримана з октаедра (правильного багатогранника) шляхом лінійної деформації однієї з його півосей. Вузол біпіраміди, який розташований на довільній відстані від точки перетину її діагоналей, в цій роботі називається рухомим. Авторами [3] побудовано системи базисних функцій чотирикутної біпіраміди з одним рухомим вузлом. При цьому застосування різних підходів до побудови базисів біпіраміди з сімома та шістьма вузлами інтерполяції вказує на переваги геометричного та метода внутрішньої конденсації, які, порівняно з алгебраїчним, мають меншу обчислювальну складність. У роботі досліджено геометричні властивості базисної функції, яка відповідає центру багатогранника, але для функцій, які асоційовано з вершинами біпіраміди, геометрична інтерпретація та її аналіз відсутні. У вказаній роботі досліджено апроксимаційні якості функцій шестивузлової моделі біпіраміди та визначено найкращий базис, для якого слід матриці жорсткості є мінімальним. Теоретичні висновки про ефективність використання біпірамід з шістьма вузлами інтерполяції в МСЕ перевірено задачею теплопровідності для бруса. При цьому аналогічне дослідження для функцій семивузлової моделі біпіраміди у вказаній роботі відсутнє.

У роботах [4, 5] побудовано базиси чотирикутної біпіраміди з двома та трьома рухомими вузлами для моделі багатогранника з сімома та шістьма вузлами інтерполяції. Отримані функції є поліноміальними другого порядку, які залежать від параметрів видовження/стиснення півосей біпіраміди. Базисні функції шестивузлової моделі біпіраміди містять додатковий параметр у вигляді вагового коефіцієнта. У роботі [4] дослідження геометричних властивостей скінченно-елементних функції біпіраміди з двома рухомими вузлами обмежене центральною функцією семивузлової моделі багатогранника. У роботі [5] геометричні властивості базисних функцій біпіраміди з трьома рухомими вузлами не вивчаються. Питання якості апроксимації функцій скінченно-елементного базису розглядається в роботах [4, 5] тільки для шестивузлової моделі біпіраміди. Особливості апроксимації на SE в формі біпіраміди з сімома вузлами інтерполяції не розглядаються.

**Метою** цієї роботи є узагальнення інформації про базиси чотирикутної біпіраміди, поповнення відомостей про геометричні та апроксимаційні властивості базисів біпіраміди та визначення умов використання біпірамід з одним/двома/трьома рухомими вузлами в алгоритмі МСЕ.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі задачі:

- отримати загальні формули для функцій семи- та шестивузлових базисів біпіраміди, використання яких дозволяє зменшити часову складність алгоритму МСЕ;
- вивчити геометричні властивості функцій скінченно-елементних базисів біпіраміди, які асоційовано з вершинами багатогранника, та методом візуалізації поверхонь рівня базисних функцій визначити їх типи в залежності від кількості вузлів інтерполяції біпіраміди та значень наявних параметрів;
- дослідити апроксимаційні властивості функцій семивузлових базисів біпіраміди, вважаючи критерієм якості апроксимації мінімальний слід матриці жорсткості на цьому багатограннику, та перевірити інтервальні оцінки для параметрів видовження/стиснення півосей біпіраміди, задовольняючи умови використання асиметричних 3D елементів в МСЕ.

### Базиси біпіраміди з сімома вузлами інтерполяції

У роботі [5] розглядається чотирикутна біпіраміда, вузли інтерполяції якої розташовані в

вершинах багатогранника та точці перетину діагоналей (рис. 1а). Вважається, що точки  $K_3, K_4, K_6$  розташовані на відстані  $a$  від  $K_0$ , а відрізки  $K_0K_1, K_0K_2, K_0K_5$  можуть мати довільну довжину:

$$K_0K_1 = r \cdot a = t, K_0K_2 = p \cdot a = b, K_0K_5 = q \cdot a = c, \quad (1)$$

де  $r, p, q > 0$  та  $r, p, q \in R$ .

Умова (1) означає, що вузли 1, 2, 5 біпіраміди (рис. 1б), які відповідають вершинам  $K_1, K_2, K_5$ , є рухомими, тобто їх можна переміщувати вздовж півосей біпіраміди.

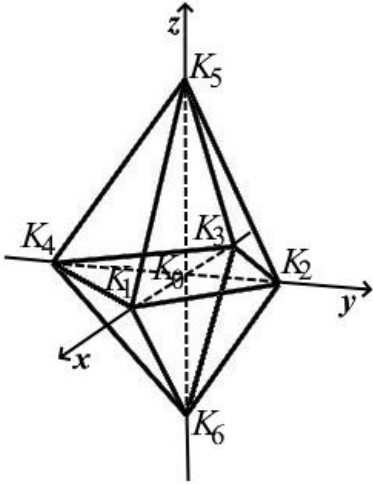


Рис. 1а. Біпіраміда як скінченний елемент

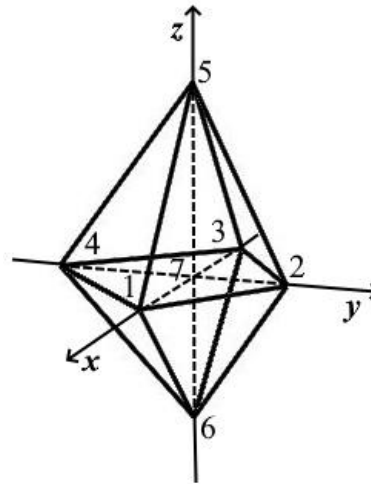


Рис. 1б. Модель біпіраміди з сімома вузлами інтерполяції

Функції скінченно-елементного базису біпіраміди з трьома рухомими вузлами [5], які асоційовано з вершинами біпіраміди, виражаються формулами:

$$\begin{aligned} NS_1 &= \frac{1}{t(a+t)} x(x+a); & NS_3 &= \frac{1}{a(a+t)} x(x-t); \\ NS_2 &= \frac{1}{b(a+b)} y(y+a); & NS_4 &= \frac{1}{a(a+b)} y(y-b); \\ NS_5 &= \frac{1}{c(a+c)} z(z+a); & NS_6 &= \frac{1}{a(a+c)} z(z-c). \end{aligned} \quad (2)$$

Функцію, що відповідає центральному вузлу, можна знайти з рівності, яка є однією з умов повноти скінченно-елементного базису [6]:

$$NS_0 = 1 - \frac{1}{pqra^2} \left( pq(x^2 + a(1-r)x) + rq(y^2 + a(1-p)y) + rp(z^2 + a(1-q)z) \right). \quad (3)$$

При цьому рівності (2), (3) є базисними функціями біпіраміди з двома рухомими вузлами [4], коли  $r=1$ , та функціями біпіраміди з одним рухомим вузлом [3], коли  $r=1, p=1$ .

Слід відмітити, що базисні функції біпіраміди, які визначаються формулами (2), (3), є квадратичними функціями трьох змінних  $x, y, z$  з параметрами  $a, r, p, q$ . Функції  $NS_i$  ( $i=0..6$ ) належать класу  $C^2$ -гладких функцій незалежно від допустимих значень параметрів, що забезпечує виконання однієї з необхідних умов збіжності МСЕ [6] в області біпіраміди.

Побудовані в роботах [3 – 5] базисні функції біпіраміди допускають геометричну інтерпретацію. Поверхні рівня функції  $NS_i$  ( $i=1..6$ ) є парами паралельних площин, що проходять через усі вузли біпіраміди, окрім однойменного вузла  $i$ . На рис. 2 зображено поверхні рівня вказаних функцій за фіксованих значень параметрів  $r, p, q$  та  $a=1$  в локальній системі координат, початок якої знаходиться в точці  $K_0$ .

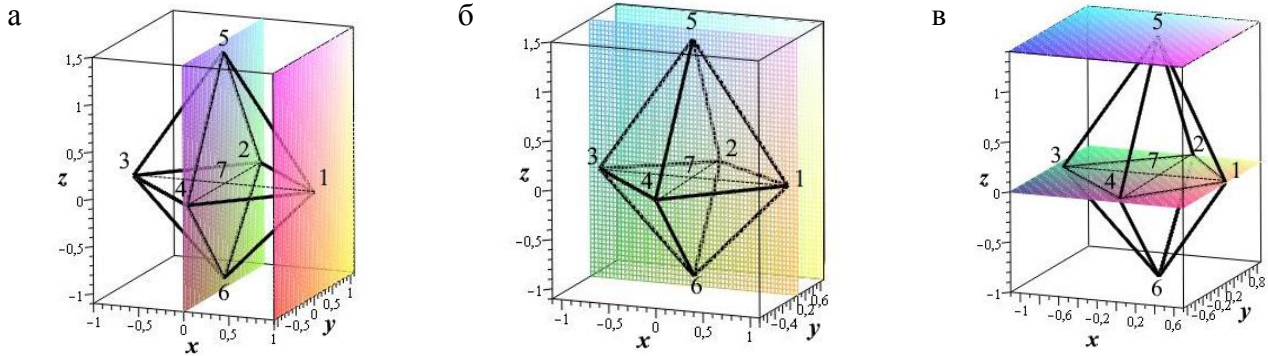


Рис. 2. Поверхні рівня функції  $NS_i(x,y,z,a,r,p,q)=0$ : а)  $i=3$ ;  $r=p=1$ ;  $q=1,4$ ; б)  $i=4$ ;  $r=1$ ;  $p=0,7$ ;  $q=1,2$ ; в)  $i=6$ ;  $r=0,9$ ;  $p=0,7$ ;  $q=1,4$

Функції, які відповідають центру біпіраміди  $K_0$ , також є квадратичними від трьох змінних  $x, y, z$  з параметрами  $a, r, p, q$ . Поверхнями рівня є еліпсоїди зі зміщеними (вздовж осі  $Oz$ /у площині  $Oyz$ /у просторі  $Oxyz$ ) центрами, геометричне розташування яких залежить від кількості рухомих вузлів біпіраміди (один/два/три). На рис. 3 зображено поверхні рівня функції  $NS_0$  біпіраміди з одним, двома та трьома рухомими вузлами при фіксованих значеннях параметрів видовження/стиснення півосей багатогранника для  $a=1$ . Усі побудови виконано в локальній системі координат з початком в точці  $K_0$ .

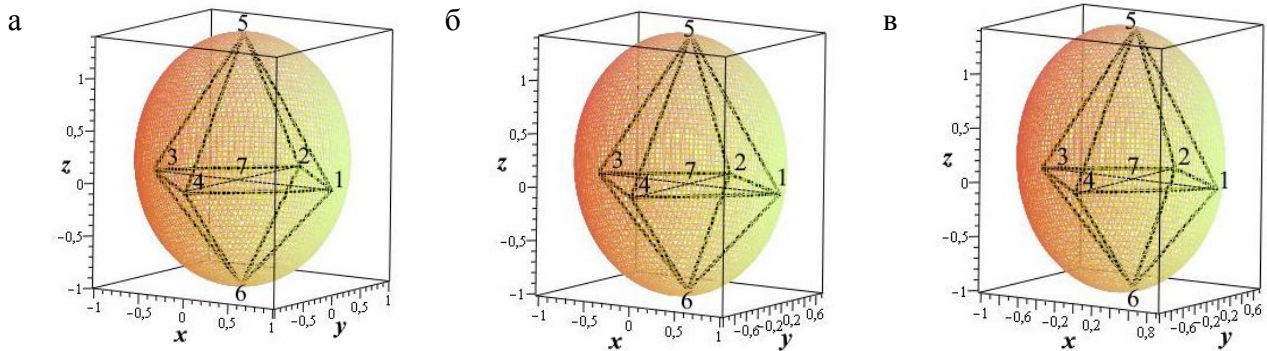


Рис. 3. Поверхні рівня функції  $NS_0(x,y,z,a,r,p,q)=0$ : а)  $r=p=1$ ;  $q=1,4$ ; б)  $r=1$ ;  $p=0,7$ ;  $q=1,4$ ; в)  $r=0,9$ ;  $p=0,7$ ;  $q=1,4$

Аналізуючи геометричне представлення функцій скінченно-елементного базису біпіраміди з сімома вузлами інтерполяції слід зазначити, що тип поверхонь другого порядку, які відповідають вузлу  $i$ , не залежить від параметрів видовження/стиснення півосей біпіраміди. Отже, геометричні властивості функцій  $NS_i$  ( $i=0..6$ ) визначаються порядком поліномів (2), (3) та відповідністю вузлу  $i$  біпіраміди.

### Базиси біпіраміди з шістьма вузлами інтерполяції

У роботі [5] отримано функції шестивузлового базису чотирикутної біпіраміди з трьома рухомими вузлами. При цьому зберігається порядок нумерації вузлів, які асоційовано з вершинами біпіраміди (рис. 1б). Побудовані базисні функції виражаються формулами:

$$\begin{aligned} NC_1 &= NS_1 + \alpha_1 \cdot NS_0, & NC_3 &= NS_3 + \alpha_2 \cdot NS_0, \\ NC_2 &= NS_2 + \beta_1 \cdot NS_0, & NC_4 &= NS_2 + \beta_2 \cdot NS_0, \\ NC_5 &= NS_5 + \gamma_1 \cdot NS_0, & NC_6 &= NS_6 + \gamma_2 \cdot NS_0, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i (i=1,2)$  – вагові коефіцієнти, які задовольняють умову  $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 1$ .

Кількість вагових коефіцієнтів у формулах (4) можна зменшити до одного, враховуючи їх лінійну залежність, та задовольняючи умови повноти [6] скінченно-елементного базису:

$$\sum_{i=1}^6 x_i NC_i = x, \sum_{i=1}^6 y_i NC_i = y, \sum_{i=1}^6 z_i NC_i = z, \sum_{i=1}^6 NC_i = 1,$$

де  $(x_i, y_i, z_i)$  – координати вершин біпіраміди в локальній системі координат (рис. 1а).

Дійсно, вагові коефіцієнти можна представити функціями  $\alpha_1$  та параметрів видовження/стиснення  $r, p, q$  біпіраміди:

$$\alpha_2 = r\alpha_1; \beta_1 = \frac{1-\alpha_1(r+1)}{p+1}; \beta_2 = p\beta_1; \gamma_1 = \frac{1-\alpha_1(r+1)}{q+1}; \gamma_2 = q\gamma_1. \quad (5)$$

Тоді, якщо  $0 \leq \alpha_1 \leq 1$ , обмеження для інших вагових коефіцієнтів мають вигляд:

$$0 \leq \alpha_2 \leq r; 0 \leq \beta_1 \leq \frac{1}{p+1}; 0 \leq \beta_2 \leq \frac{p}{p+1}; 0 \leq \gamma_1 \leq \frac{1}{q+1}; 0 \leq \gamma_2 \leq \frac{q}{q+1}.$$

Таким чином, базис чотирикутної біпіраміди з трьома рухомими вузлами, які знаходяться в точках  $K_1, K_2, K_5$ , визначається формулами (4), (5). При цьому базисні функції біпіраміди з двома рухомими вузлами  $K_2, K_5$  [4] можна отримати з рівностей (4), (5) при  $r=1$  та  $\alpha_1 = \alpha_2$ . Базисні функції біпіраміди з одним рухомим вузлом  $K_5$  відповідають значенням параметрів  $r=p=1$  та вагових коефіцієнтів  $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2$ .

Отримані функції скінченно-елементного базису біпіраміди з шістьма вузлами інтерполяції, які задовольняють формули (4), (5), є квадратичними функціями трьох змінних  $x, y, z$  з параметрами  $a, r, p, q, \alpha_1$ . Функції  $NC_i$  ( $i=1..6$ ) належать класу  $C^2$ -гладких в області біпіраміди функцій незалежно від значень параметрів  $a, r, p, q$  та вагового коефіцієнта  $\alpha_1$ , що гарантує виконання умов одного з критеріїв збіжності МСЕ [6] в області цього багатогранника.

Побудовані в роботах [3 – 5] базисні функції чотирикутної біпіраміди з шістьма вузлами інтерполяції допускають геометричну інтерпретацію. На рис. 4 зображено поверхні рівня для базисної функції  $NC_1$  при  $r=0,9, p=0,7, q=1,4, a=1$  в локальній системі координат.

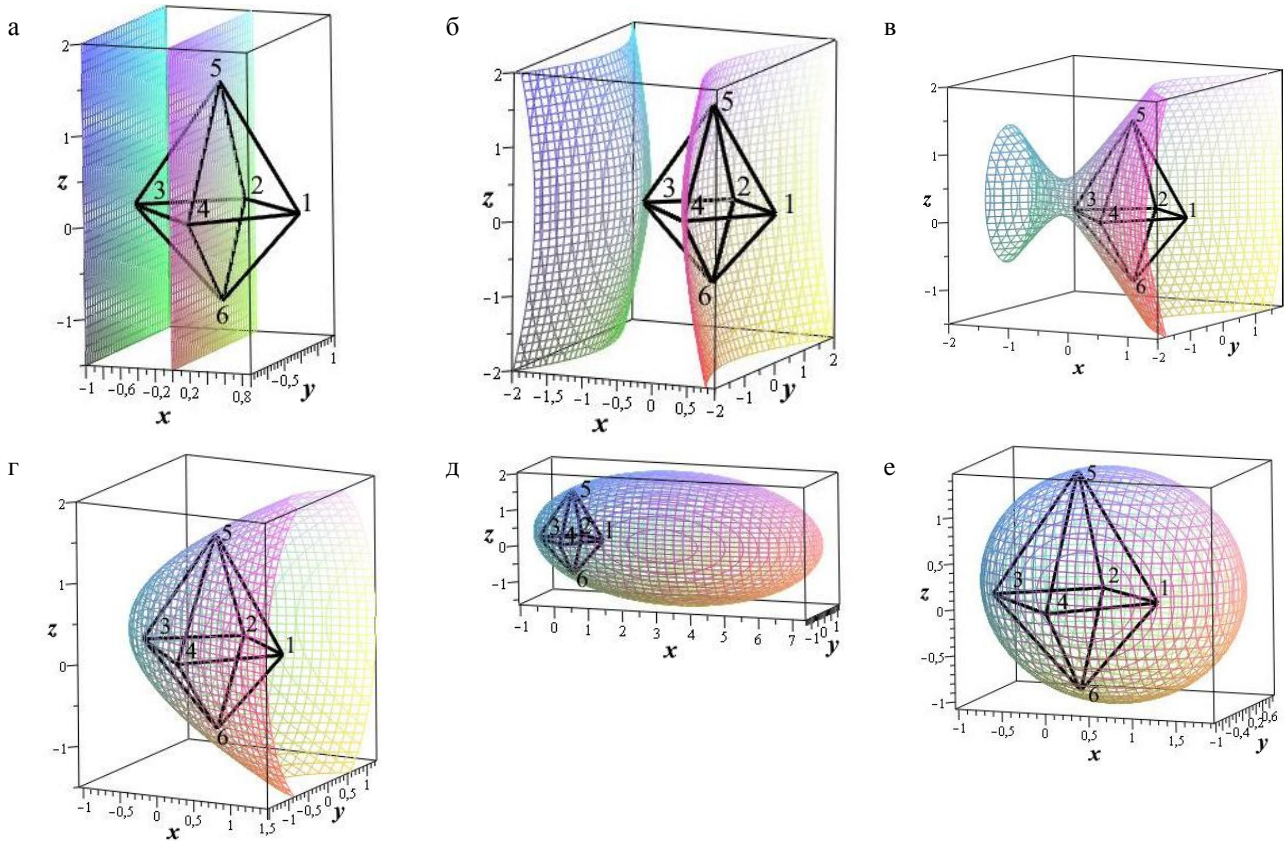


Рис. 4. Поверхні рівня функції  $NC_1(x,y,z,a,r,p,q,\alpha_1)=0$ : а)  $\alpha_1=0$ , пара паралельних площин; б)  $\alpha_1=0,1$ , двопорожнинний гіперболоїд; в)  $\alpha_1=0,3$ , однопорожнинний гіперболоїд; г)  $\alpha_1=0,5$ , еліптичний параболоїд; д)  $\alpha_1=0,6$ , еліпсоїд; е)  $\alpha_1=1$  еліпсоїд

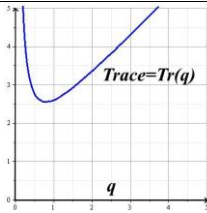
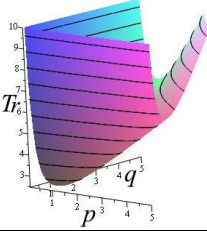
Аналізуючи геометричні властивості функцій скінченно-елементного базису біпіраміди з шістьма вузлами інтерполяції, слід зазначити, що в залежності від значення вагового коефіцієнту  $\alpha_1$  поверхні рівня, які асоційовано з вузлом  $i$ , є різними типами поверхонь другого порядку.

#### Базиси біпіраміди з мінімальним слідом матриці жорсткості

В роботах [3 – 5] досліджено апроксимаційні властивості базисів біпіраміди з шістьма вузлами інтерполяції, При цьому вважається, що найкращим є базис з мінімальним слідом матриці жорсткості на SE [7]. За цією характеристикою знайдено критичні значення параметрів видовження/стиснення півосей біпіраміди, які доставляють мінімум функції сліду матриці жорсткості  $Trace=Tr(r,p,q)$  (табл.1). Усі розрахунки виконано для  $a=1$ .

Таблиця 1

**Результати дослідження на мінімум функції сліду матриці жорсткості біпіраміди з шістьма вузлами інтерполяції**

Кількість рухомих вузлів біпіраміди	Критичні значення параметрів базисних функцій, які задовольняють формулам (4), (5)			Мінімум функції сліду матриці жорсткості	Геометричне представлення функції сліду матриці жорсткості
	$r$	$p$	$q$		
один	1	1	0,7584	2,4776	
два	1	0,744	0,744	2,475	
три	0,64917	0,70588	0,70593	2,358	Поверхнею рівня $Trace=2,358$ є точка $(r,p,q)=(0,64917; 0,70588; 0,70593)$

Для подальшого аналізу якості апроксимації на СЕ в формі біпіраміди необхідно знайти значення параметрів  $r, p, q$ , при яких слід матриці жорсткості є мінімальним.

За формулою:

$$Trace_7 = \sum_{i=0}^6 \iiint_V \left( \left( \frac{\partial NS_i}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial NS_i}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial NS_i}{\partial z} \right)^2 \right) dv,$$

де  $V$  – біпіраміда,  $NS_i$  – базисні функції біпіраміди (1 – 3), – функцію  $Trace_7=Tr_7(r,p,q)$  можна представити многочленом одного з параметрів  $r, p, q$ . Тоді розвинення функції сліду матриці жорсткості за степенями  $q$  має вигляд:

$$Trace_7 = \frac{a}{r^2 p^2 q^2 (1+r)(1+p)(1+q)} \sum_{i=0}^4 A_i(r,p) q^i, \tag{6}$$

де

$$\begin{aligned} A_0 &= 4(r^2 p^4 + r^2 p^2 + r^4 p^4 + r^4 p^2) + 8(r^2 p^3 + r^4 p^3 + r^3 p^2 + r^3 p^4) + 16r^3 p^3, \\ A_1 &= 5(r^2 p^4 + r^2 p^2 + r^4 p^4 + r^4 p^2) + 10(r^2 p^3 + r^4 p^3 + r^3 p^2 + r^3 p^4) + 20r^3 p^3, \\ A_2 &= 12(r^2 p^4 + r^2 p^2 + r^4 p^4 + r^4 p^2) + 21(r^2 p^3 + r^4 p^3 + r^3 p^2 + r^3 p^4) + 5(rp^4 + rp^2 + r^4 p + r^2 p) + \\ &\quad + 4(r^2 + p^2 + p^4 + r^4) + 10(r^3 p + rp^3) + 36r^3 p^3, \tag{7} \\ A_3 &= 36(r^3 p^4 + r^3 p^2 + r^4 p^3 + r^4 p^2) + 21(r^2 p^4 + r^2 p^2 + r^4 p^4 + r^4 p^2) + 10(rp^4 + rp^2 + r^4 p + r^2 p) + \\ &\quad + 8(r^2 + p^2 + p^4 + r^4) + 20(r^3 p + rp^3) + 16(r^3 + p^3) + 60r^3 p^3, \\ A_4 &= A_2 - 10(r^3 p + rp^3) + 8(r^3 + p^3). \end{aligned}$$

Для дослідження на екстремум функції  $Trace_7=Tr_7(r,p,q)$  необхідно знайти критичні точки цієї функції, задовольняючи умови

$$\begin{cases} \partial Tr_7 / \partial r = 0, \\ \partial Tr_7 / \partial p = 0, \\ \partial Tr_7 / \partial q = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Єдиним розв'язком системи рівнянь (8) є точка  $(r_0, p_0, q_0) \approx (0,78996; 0,78996; 0,78996)$ , координати якої знайдено чисельним методом з точністю до  $10^{-4}$  для  $a=1$  (рис. 5).

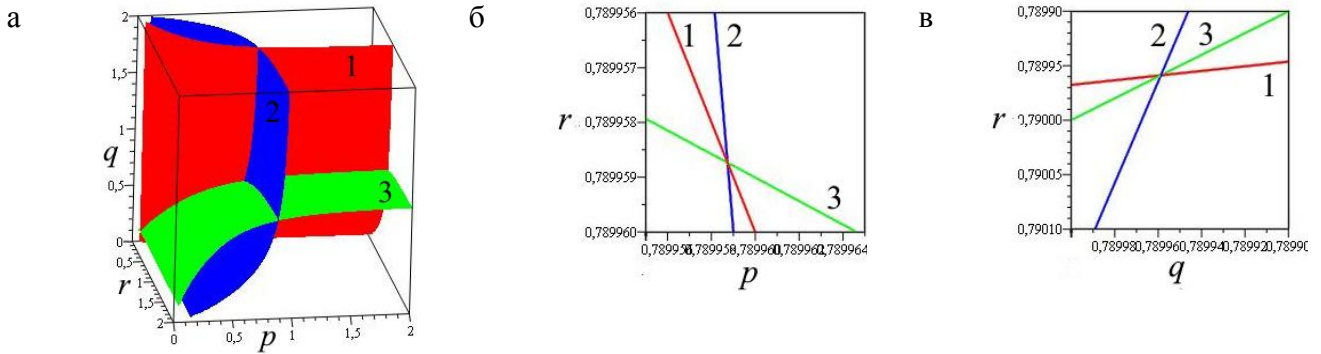


Рис. 5. Графічне представлення розв'язків системи (8): а) у просторі  $Orpq$ ; б) в проекції на  $Orp$ ; в) в проекції на  $Oqr$ , де 1 – поверхня  $\partial Tr_7 / \partial r = 0$ ; 2 – поверхня  $\partial Tr_7 / \partial p = 0$ ; 3 – поверхня  $\partial Tr_7 / \partial q = 0$

Усі головні мінори матриці частинних похідних другого порядку функції  $Trace_7 = Tr_7(r, p, q)$  є додатними в знайденій точці. Отже, за критерієм Сільвестра [8]  $(r_0, p_0, q_0)$  є точкою мінімуму функції сліду матриці жорсткості біпіраміди. Відповідний мінімум функції сліду матриці жорсткості з точністю до  $10^{-4}$  дорівнює 4,15007.

Отримані формули (6), (7) дозволяють провести аналогічне дослідження на екстремум функцій сліду матриці жорсткості біпіраміди, яка має два та один рухомі вузли. Відповідні функції  $Trace_7 = Tr_7(r, p, q)$  розглядаються окремо за фіксованих значень параметрів видовження/стиснення півосей біпіраміди. В табл. 2 представлено основні результати перевірки умов існування мінімуму функцій  $Tr_7(p, q)$  та  $Tr_7(q)$ . Усі обчислення виконано з точністю до  $10^{-4}$ .

Таблиця 2

**Результати дослідження на мінімум функції сліду матриці жорсткості біпіраміди з сімома вузлами інтерполяції**

Кількість рухомих вузлів біпіраміди	Критичні значення параметрів базисних функцій, які задовольняють формулам (4), (5)			Мінімум функції сліду матриці жорсткості (6), (7)	Геометричне представлення функції сліду матриці жорсткості
	$r$	$p$	$q$		
один	1	1	0,84990	4,33918	
два	1	0,82447	0,82447	4,2592	



Аналізуючи результати дослідження на екстремум функції сліду матриці жорсткості біпіраміди з шістьма та сімома вузлами інтерполяції, слід зауважити, що незалежно від кількості рухомих вузлів біпіраміди існують допустимі значення параметрів  $r, p, q$ , при яких значення сліду матриці жорсткості є мінімальним. Отже, за цією характеристикою найкращими серед семивузлових є базиси біпіраміди, які задано формулами (2), (3) зі значеннями параметрів у табл. 2 та на рис. 5. Відповідно найкращими серед шестивузлових є базиси біпіраміди, які задано формулами (4), (5) зі значеннями параметрів у табл. 1.

**Умови застосування біпіраміди в методі скінченних елементів**

Вивчення апроксимаційних властивостей біпіраміди спрямоване на визначення умов використання цього багатогранника при алгоритмізації МСЕ. Оскільки біпіраміда (рис. 1а) не є правильним поліедром, існує задача визначення меж її використання як комірки скінченно-елементної решітки. У роботах [3 – 5] на основі аналізу відхилень об’єму біпіраміди від об’єму октаедра отримано інтервальні оцінки для параметрів видовження/стиснення півосей біпіраміди  $r, p, q$ . У табл. 3 представлено відповідні обмеження для біпіраміди з одним, двома та трьома рухомими вузлами.

Таблиця 3

**Інтервальні оцінки для параметрів біпіраміди**

Кількість рухомих вузлів біпіраміди	Значення параметрів видовження/стиснення півосей біпіраміди			Допустимі межі відхилення об’єму біпіраміди від об’єму октаедра	
	$r$	$p$	$q$	на 10%	на 25%
один	1	1	$>0$	$0,66 \leq q \leq 0,86$	$0,51 \leq q \leq 1,0$
два	1	$>0$	$>0$	$0,8 \leq (p+1)q \leq 1,2$	$0,5 \leq (p+1)q \leq 1,5$
три	$>0$	$>0$	$>0$	$3,6 \leq rpq + r(p+1) + p(q+1) + q(r+1) \leq 4,4$	$3 \leq rpq + r(p+1) + p(q+1) + q(r+1) \leq 5$

Аналізуючи відповідні оцінки для параметрів біпіраміди, слід зауважити, що критичні значення  $r, p, q$  (табл. 1, 2, рис. 5) задовольняють умови відхилення об’єму біпіраміди від об’єму правильного багатогранника (октаедра) на 10 %, що гарантує високу точність отримуваних розв’язків МСЕ. Але дані в табл. 3 потребують уточнення розрахунком показників якості для 3D елементів, які використовують в ANSYS [9, 10] та інших системах скінченно-елементного аналізу [11].

**Висновки**

1. У роботі скінченно-елементні базиси біпіраміди представлено двома різними системами функцій, які відповідають СЕ у формі біпіраміди з сімома та шістьма вузлами інтерполяції. Базисні функції кожної з двох систем є квадратичними, що забезпечує  $C^2$ -гладкість наближуваних функцій в області біпіраміди. Функції базису біпіраміди містять невизначені параметри, які дозволяють узагальнити вирази для базисних функцій з одним/двома/трьома рухомими вузлами на цьому багатограннику.

2. Вивчено геометричні властивості базисних функцій біпіраміди з сімома та шістьма вузлами інтерполяції. Виявлено відмінності в представленні поверхнями рівня функцій, які асоційовано з вершинами біпіраміди. Поверхні рівня функцій семивузлового базису біпіраміди є виродженими поверхнями другого порядку в вигляді пари паралельних площин. Поверхні рівня функцій шестивузлового базису біпіраміди є поверхнями другого порядку різних типів, які залежать від значення вагового коефіцієнта як параметра функцій скінченно-елементного базису.

3. Досліджено апроксимаційні властивості систем базисних функцій біпіраміди з сімома та шістьма вузлами інтерполяції. Серед функцій скінченно-елементного базису біпіраміди знайдено найкращі, яким відповідають критичні значення параметрів видовження/стиснення

півосей біпіраміди, що доставляють мінімум функції сліду матриці жорсткості. Отримані значення параметрів задовольняють інтервальним оцінкам, які визначають межі відхилення об'єму біпіраміди від об'єму октаедра на 10 %, що дозволяє прогнозувати високу точність розв'язків при застосуванні біпірамід в МСЕ.

4. Перспективою подальших досліджень є

– дослідження на збіжність МСЕ на СЕ в формі біпіраміди в ансамблі з тетраедрами та октаедрами для математичного обґрунтування використання біпірамід у решітках тетраедально-октаедральної структури;

– визначення показників якості біпіраміди, які використовують відомі системи скінченно-елементного аналізу для елементів у 3D, з метою уточнення інтервальних оцінок для параметрів видовження/стиснення півосей біпіраміди, що гарантують якість апроксимації на біпіраміді;

– побудова кубатурних формул на біпіраміді, яка має два/три рухомі вузли, що дозволить використовувати біпіраміду в скінченно-елементних розрахунках.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Greiner G. Hierarchical Tetrahedral-Octahedral Subdivision for Volume Visualization / G. Greiner, R. Grosso // The Visual Computer. – 2000. – № 16 (6). – P. 357 – 369. DOI: <https://doi.org/10.1007/PL00007214>.
2. de Bruijn H. Numerical Method for 3D Ideal Flow [Electronic resource] / Access mode : <http://hdebruijn.soo.dto.tudelft.nl/jaar2010/octaeder.pdf>.
3. Мотайло А. П. Побудова базису біпіраміди / А. П. Мотайло, А. Н. Хомченко, Г. Я. Тулущенко // Радіоелектроніка, інформатика, управління. – (2016). – № 4 (39). – P. 29 – 36. DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2016-4-4>.
4. Мотайло А. П. Побудова базису біпіраміди з двома рухомими вузлами / А. П. Мотайло // Системи та технології. – 2023. – Т. 65, №1. – С. 7 – 12. DOI: <https://doi.org/10.32782/2521-6643-2023.1-65.1>.
5. Мотайло А. П. Базис біпіраміди з трьома рухомими вузлами / А. П. Мотайло // Towards a Holistic Understanding: Interdisciplinary Approaches to Tackle Global Challenges and Promotion of Innovative Solutions: матеріали І-ої міжнародної науково-практичної інтернет-конференції (м. Дніпро, 14 – 15 березня 2024). Дніпро, 2024. – С. 158 – 160.
6. Zienciewicz O. C. Introductory Lectures on the Finite Elements Method / O. C. Zienciewicz. – Springer, 2014. – 99 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2973-9>.
7. Sekulović M. Metod konačnih elemenata [The Finite Element Method] / M. Sekulović. – Beograd : Gradevinska knjiga, 1984. – 649 p.
8. Gilbert George T. Positive definite matrices and Sylvester's criterion / George T. Gilbert // The American Mathematical Monthly. – 1991. – № 98 (1). – P. 44 – 46. DOI: <https://doi.org/10.2307/2324036>.
9. How to calculate Element Quality Criteria in Ansys Meshing. Skewness [Electronic resource]. – Access mode : <https://www.youtube.com/watch?v=WgOMS YGMZfc>.
10. Lecture7: Mesh Quality & Advanced Topics – FEA Tips [Electronic resource]. – Access mode: [https://featips.com/wp-content/uploads/2021/05/Mesh-Intro\\_16.0\\_L07\\_Mesh\\_Quality\\_and\\_Advanced\\_Topics.pdf](https://featips.com/wp-content/uploads/2021/05/Mesh-Intro_16.0_L07_Mesh_Quality_and_Advanced_Topics.pdf).
11. How Element Quality is Calculated – Altair [Electronic resource]. Access mode: [https://2021.help.altair.com/2021/hwdesktop/hm/topics/pre\\_processing/meshing/element\\_quality\\_how\\_its\\_calculated\\_c.htm](https://2021.help.altair.com/2021/hwdesktop/hm/topics/pre_processing/meshing/element_quality_how_its_calculated_c.htm).

Стаття надійшла до редакції 28.05.2024.

Стаття пройшла рецензування 10.06.2024.

**Мотайло Анжеліка Павлівна** – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри природничо-наукової підготовки, e-mail: [akillehzna@gmail.com](mailto:akillehzna@gmail.com).

Херсонська державна морська академія.