

Л. Г. Раскін, д-р техн. наук, проф.; Л. В. Сухомлин, канд. техн. наук, проф.;
Д. Д. Соколов; В. В. Власенко; А. П. Гатунов; С. О. Андрієнко

ЗНАХОДЖЕННЯ ЗАКОНУ РОЗПОДІЛУ ТРИВАЛОСТІ ПЕРЕБУВАННЯ НАПІВМАРКОВСЬКОЇ СИСТЕМИ НА ВИБРАНІЙ МНОЖИНІ СТАНІВ ДО ПЕРЕХОДУ У ФІКСОВАНИЙ СТАН

Під час дослідження стохастичних систем важливе для практики місце посідає завдання відшукування закону розподілу тривалості перебування системи на заданій виділеній множині станів. Ця проблема виникає в задачах оцінювання ефективності та управління в системах масового обслуговування, у теорії надійності та в багатьох інших задачах дослідження операцій. Об'єкт дослідження – метод відшукування закону розподілу тривалості перебування напівмарковської системи на виділеній множині станів. Це завдання має природне продовження – знайти закон розподілу тривалості перебування системи на виділеній множині станів до моменту потрапляння в конкретний заданий стан. Може бути наведене гранично загальне формулювання цього завдання. Нехай система містить множину станів, кожен з яких характеризується набором значень деяких ознак. Потрібно знайти закон розподілу тривалості блукання множиною станів до потрапляння в стан із конкретним набором значень цих ознак. Ідея методу ґрунтується на віртуальному поданні множини станів виділеної множини як єдиного стану. Тривалість перебування в цьому укрупненому стані визначається сукупністю законів розподілу тривалостей перебування в кожному із станів виділеної множини до переходу в інші стани цієї множини. Використовуваний математичний інструментарій – розв'язання систем диференціальних рівнянь. Метод ілюструється розв'язанням простого прикладу, алгоритм реалізації якого містить усі принципові його компоненти. Наукова і практична цінність методу полягає в можливості його використання для розв'язання безлічі задач аналізу стохастичних напівмарковських систем з довільними щільностями розподілу тривалості перебування в кожному зі станів до відходу. Напівмарковська система є математичною моделлю, яка описує динаміку системи, що еволюціонує в часі через послідовність станів, де час перебування в кожному стані є випадковою величиною з довільним розподілом, який залежить від поточного та наступного станів. Напівмарковська система узагальнює марковські процеси, допускаючи складніші часові залежності. На відміну від марковського процесу, де час перебування в стані експоненціально розподілений, у напівмарковській системі він може мати будь-який розподіл. Імовірнісна система, що описує поведінку якої можна передбачити з певним ступенем імовірності на основі вивчення її минулої поведінки.

Ключові слова: напівмарковські системи, імовірнісно-часовий аналіз поведінки систем.

Вступ

Теоретичний підхід до розв'язання задач аналізу напівмарковських систем можна реалізувати наступним чином. Введемо стохастичний процес $\xi(t)$ у просторі станів E з деякою підмножиною $E_0 \in E$. Візьмемо τ_k – час перебування процесу в підмножині E_0 до першого разу, коли пішли в E_0 . Поведінка процесу в часі задається матрицею умовних ймовірностей переходів $(q_{ij}(t))$ та вектор функцій розподілу часу перебування в окремих станах $F(t) = F_i(t_i)$. Потім вводиться випадкова величина $I_{kr}(O_k)$, що є індикатором переходу процесу зі стану k у стан r за умови, що час, проведений у стані k перед переходом дорівнює O_k . Відповідне відношення має вигляд:

$$I_{kr}(O_k) = \begin{cases} 1, & \text{якщо з імовірністю } q_{kr} O_k \text{ перехід стався,} \\ 0, & \text{з імовірністю } 1 - q_{kr} O_k, \text{ в іншому випадку.} \end{cases}$$

При цьому безумовне математичне очікування випадкової величини $I_{kr}(O_k)$ дорівнює:

$$M[q_{kr}(O_k)] = \int_0^{\infty} q_k r(t) \cdot \ell_k(t) dt = P_{kr}. \quad (1)$$

Для відшукування тривалостей ζ_k перебування процесу в підмножині станів E_0 використовується така система рівнянь:

$$\zeta_k = O_k + \sum_{r \in E_0} I_{kr}(O_k) \zeta_r, k \in E_0. \quad (2)$$

Сенс цього співвідношення зрозумілий: час перебування процесу в E_0 з початковим станом k є сума часу перебування $(O_k)k$ до якого після переходу в стан r додається час перебування в цьому стані до виходу з E_0 .

Технологію розв'язання системи рівнянь (2) легко реалізувати в найпростішому окремому випадку, коли густини розподілу тривалостей перебування в кожному із станів експоненціальні, тобто досліджувана система є марковською [1, 2]. Проблема, що виникає і формулюється в загальному випадку, полягає в розробленні методу розв'язання цієї задачі для довільних напівмарковських систем.

Аналіз публікацій

У низці робіт розглянуто різні можливі підходи до розв'язання поставленої задачі. У [3] показано, що за виконання деяких умов закон розподілу тривалості перебування у виділеній множині станів є асимптотично нормальним. У [4] визначено перелік цих умов. У роботі [5] задачу розв'язано для найпростішого випадку, коли виділена множина містить один стан. У [6] розв'язок отримано для середніх значень тривалості перебування у виділеній множині станів дискретного напівмарковського процесу. У [7] цю середню тривалість знайдено в припущенні про асимптотичну нормальність відповідних випадкових величин. У [8] розв'язок у середньому отримано за деяких припущень про характер розподілів часу перебування в кожному зі станів. У [9] поставлену задачу розв'язують для дискретної напівмарковської системи.

Наведений короткий аналіз відомих публікацій показує, що проблема відшукування розподілу тривалості роботи системи до потрапляння у виділену множину станів у загальному випадку для довільних напівмарковських систем залишається актуальною.

Мета та завдання дослідження

Відповідно до вищесказаного метою дослідження є розроблення загального методу відшукування розподілу тривалості роботи системи до потрапляння у виділену множину станів у загальному випадку для довільних напівмарковських систем.

Матеріали та методи

У співвідношеннях (2) перейдемо до математичних очікувань ліворуч і праворуч. При цьому отримаємо:

$$M[\zeta_k] = M[O_k] + \sum_{r \in E_0} M[I_{kr}(O_k)] \cdot M[\zeta_r].$$

Звідси:

$$\begin{aligned} O_k &= M_k + \sum_{r \in E_0} p_{kr} O_r, \\ O_k - \sum_{r \in E_0} p_{kr} O_r &= M_k, k \in E_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут:

$$O_k = M[\zeta_k], M_k = M[O_k].$$

Таким чином, отримано систему лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язання якої дає набір

середніх значень тривалості перебування в кожному зі станів підмножини E_0 для початкового стану $k \in E_0$. Рішення в середньому корисне, але недостатньо інформативне. Тому продовжимо розв'язання задачі. Введемо $\varphi_k(O)$ – щільність розподілу випадкової величини ζ_k . Перетворення Лапласа над $\varphi_k(t)$ має вигляд:

$$\varphi_k^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} \varphi_k(t) dt = M[e^{-s\zeta_k}]. \quad (4)$$

Використовуючи (4), перепишемо (2) таким чином:

$$e^{-s\zeta_k} = \exp\left\{-s\left[O_k + \sum_{r \in E_0} I_{kr}(O) \zeta_k\right]\right\}. \quad (5)$$

Якщо тепер у (5) перейти до математичного очікування ліворуч і праворуч, то отримаємо перетворення Лапласа від відповідних густин розподілу, тобто:

$$\varphi_k^*(s) = M\left[e^{-sO_k} e^{s \sum_{r \in E_0} I_{kr}(O) \zeta_k}\right]. \quad (6)$$

Так як:

$$e^{la} = Ie^a + (1-I) = 1 + I(e^a - 1),$$

то співвідношення (6) набуде вигляду:

$$\varphi_k^*(s) = M\left[e^{-sO_k} \cdot e^{-\sum_{r \in E_0} O_k \zeta_r}\right] = M\left[e^{-sO_k} \cdot \prod_{r \in E_0} (1 + I_{kr}(O_k)(e^{-s\zeta_r} - 1))\right] \quad (7)$$

Оскільки $\sum_{r \in E_0} r = 1$, то в множині $\{I_{kr}\}, r \in E_0$, тільки один індикатор дорівнює 1. Тому:

$$\prod_{r \in E_0} (1 + I_{kr}(O_k)(e^{-s\zeta_k} - 1)) = 1 + \sum_{r \in E_0} I_{kr}(O_k)(e^{-s\zeta_k} - 1).$$

При цьому (7) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \varphi_k^*(s) &= M\left[e^{-sO_k} \left[1 + \sum_{r \in E_0} I_{kr}(O_k)(e^{-s\zeta_r} - 1)\right]\right] = \\ &= M\left[e^{-sO_k} + \sum_{r \in E_0} e^{-sO_k} I_{kr}(O_k)(e^{-s\zeta_r} - 1)\right] = \\ &= M\left[e^{-sO_k}\right] + \sum_{r \in E_0} M\left[e^{-sO_k} I_{kr}(O_k)\right] M\left[e^{-s\zeta_r} - 1\right] = \\ &= f_k^*(s) + \sum_{r \in E_0} \int_0^\infty e^{-st} q_{kr}(t) f_k(t) dt [\varphi_r^*(s) - 1] = \\ &= f_k^*(s) + \sum_{r \in E_0} p_{kr}(s) [\varphi_r^*(s) - 1]. \end{aligned} \quad (8)$$

Тут:

$$p_{kr}(s) = \int_0^\infty e^{-st} p_{kr}(t) dt,$$

де

$$p_{kr}(t) = \frac{dp_{kr}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^t q_{kr}(\zeta) f_k(\zeta) d\zeta = q_{kr}(t) \cdot f_k(t).$$

Врахуємо тепер, що $F_k(t) = \sum_{r \in E_0} p_{kr}(t)$, звідки:

$$f_k(t) = \sum_{r \in E_0} p_{kr}(t) \text{ and } f_k^*(s) = \sum_{r \in E_0} p_{kr}(s).$$

Тоді:

$$\begin{aligned} \varphi_k^*(s) &= \sum_{r \in E_0} p_{kr}(s) + \sum_{r \in E_0} p_{kr} \varphi_r^*(s) - \sum_{r \in E_0} p_{kr}(s) = \\ &= \sum_{r \in E_0} p_{kr}(s) + \sum_{r \in E_0} p_{kr}(s) \varphi_r^*(s), k \in E_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Введемо функції $p_k^{E_0}(s) = \sum_{r \in E_0} p_{kr}(s)$. Тоді система (9) набуває вигляду:

$$\varphi_k^*(s) - \sum_{r \in E_0} p_{kr}(s) \cdot \varphi_r^*(s) = p_k^{E_0}(s), k \in E_0$$

Так як:

$$p_{kr}(t) = \frac{dp_{kr}(t)}{dt} = p'_{kr}(t),$$

то остаточно маємо:

$$\varphi_k^*(s) - \sum_{r \in E_0} \varphi_r^*(s) \cdot p'_{kr}(s) = \sum_{r \in E/E_0} p'_{kr}(s)$$

або

$$\varphi_k^*(s) - \frac{1}{s} \sum_{r \in E_0} \varphi_r^*(s) \cdot p_{kr}(s) = \frac{1}{s} \sum_{r \in E/E_0} p_{kr}(s).$$

Розв'язання отриманої системи рівнянь дає набір $\varphi_k^*(s)$, який після зворотного перетворення Лапласа визначає шуканий набір $\varphi_k(t)$.

Розглянемо простий приклад реалізації описаної технології. Нехай система складається з двох невідновлюваних підсистем, що працюють одночасно. Тривалість безвідмовної роботи підсистем – випадкові величини $\xi_i, i=1,2$, з функціями розподілу $Q_i(t) = P(\xi_i < t), i=1,2$. Систему вважають такою, що відмовила в разі відмови обох підсистем. Потрібно знайти закон розподілу тривалості безвідмовної роботи системи.

Уведемо множину можливих станів системи:

E_0 – обидві підсистеми працездатні;

E_1 – перша система відмовила, друга – справна;

E_2 – друга система відмовила, перша – справна;

E_3 – обидві підсистеми відмовили.

Граф станів і переходів системи представлений на рис. 1

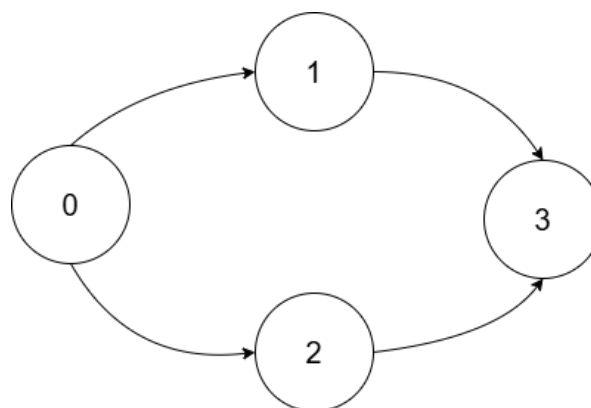


Рис. 1. Граф станів і переходів системи

Введемо:

$$Q_{01}(t) = Q_1(t); Q_{02} = Q_2(t)$$

$$\begin{aligned}
p_{01}(t) &= \int_0^t (1 - Q_{02}(\tau)) dQ_{01}(\tau) = \\
&= (1 - Q_{02}(\tau))Q_{01}(\tau) \Big|_0^t + \int_0^t Q_{01}(\tau) dQ_{02}(\tau) = \\
&= (1 - Q_{02}(t))Q_{01}(t) + \int_0^t Q_{01}(\tau) dQ_{02}(\tau), \\
p_{01} &= p_{01}(\infty) = \int_0^\infty Q_{01}(\tau) dQ_{02}(\tau); p_{01} = P(\xi_1 < \xi_2)
\end{aligned}$$

Продовжуючи аналогічно:

$$\begin{aligned}
p_{02}(t) &= \int_0^t (1 - Q_{01}(\tau)) dQ_{02}(\tau) = \\
&= (1 - Q_{01}(\tau))Q_{02}(\tau) \Big|_0^t + \int_0^t Q_{02}(\tau) dQ_{01}(\tau) = \\
&= (1 - Q_{01}(t))Q_{02}(t) + \int_0^t Q_{02}(\tau) dQ_{01}(\tau). \\
p_{02} &= p_{02}(\infty) = \int_0^\infty Q_{02}(\tau) dQ_{01}(\tau); p_{02} = P(\xi_2 < \xi_1). \\
F_{01}(t) &= \frac{p_{01}(t)}{p_{01}} = \frac{(1 - Q_{02}(t))Q_{01}(t) + \int_0^t Q_{01}(\tau) dQ_{02}(\tau)}{\int_0^\infty Q_{01}(\tau) dQ_{02}(\tau)}. \\
F_{02}(t) &= \frac{p_{02}(t)}{p_{02}} = \frac{(1 - Q_{01}(t))Q_{02}(t) + \int_0^t Q_{02}(\tau) dQ_{01}(\tau)}{\int_0^\infty Q_{02}(\tau) dQ_{01}(\tau)}.
\end{aligned}$$

Далі, час перебування у стані E_1 до переходу в E_3 є залишок $\xi_2 - \xi_1$, причому, оскільки система потрапила в E_1 , то $\xi_2 > \xi_1$.

Введемо $\alpha_1 = \xi_2 - \xi_1$ and $\alpha_2 = \xi_1 - \xi_2$.

Тоді умовний закон розподілу часу перебування в стані 1 до переходу в 3 визначається виразом:

$$F_{13}(t) = P(\alpha_1 < t / \xi_2 - \xi_1 > 0) = P(\xi_2 - \xi_1 < t / \xi_2 - \xi_1 > 0). \quad (10)$$

Випадкову величину з функцією розподілу, що визначається правою частиною (10), позначимо $\xi_2 + \xi_1^+$.

Тоді:

$$F_{13}(t) = P[(\xi_2 - \xi_1)^+ < t].$$

При цьому:

$$\begin{aligned}
F_{13}(t) &= P(\xi_2 - \xi_1 < t / \xi_2 > \xi_1) = \frac{P(\xi_2 - \xi_1 < t, \xi_2 > \xi_1)}{P(\xi_2 > \xi_1)} = \\
&= \frac{P(0 < \xi_2 - \xi_1 < t)}{P(\xi_2 > \xi_1)} = \frac{P(\xi_1 < \xi_2 < t + \xi_1)}{P(\xi_1 < \xi_2)} = \\
&= \frac{\int_0^\infty [Q_2(t + \tau) - Q_2(\tau)] dQ_1(\tau)}{P_{01}}; \\
F_{23}(t) &= P(\xi_1 - \xi_2 < t / \xi_1 > \xi_2) = \frac{P(0 < \xi_1 - \xi_2 < t, \xi_2 < \xi_1)}{P(\xi_1 < \xi_2)} = \\
&= \frac{P(\xi_2 < \xi_1 < t + \xi_2)}{P(\xi_2 < \xi_1)} = \frac{\int_0^\infty [Q_1(t + \tau) - Q_1(\tau)] dQ_2(\tau)}{P_{02}}.
\end{aligned}$$

Зауважимо, що $p_{13} = p_{23} = 1$. Крім того, оскільки система не відновлюється, то $p_{33} = 1$.

Таким чином:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p_{01} & p_{01} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & F_{01}(t) & F_{02}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{13}(t) \\ 0 & 0 & 0 & F_{23}(t) \\ 0 & 0 & 0 & H(t) \end{pmatrix}.$$

де $H(t)$ – довільна функція розподілу часу перебування в стані E_3 .

Нехай, наприклад, для максимальної простоти, $Q_1(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t}$; $Q_2(t) = 1 - e^{-\lambda_2 t}$.

Тоді:

$$\begin{aligned}
p_{01}(t) &= e^{-\lambda_2 t} (1 - e^{-\lambda_1 t}) + \int_0^t (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau} d\tau = \\
&= -e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} + 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} = \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}; \quad p_{01} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.
\end{aligned}$$

Аналогічно:

$$p_{02}(t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}; \quad p_{02} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

$$\begin{aligned}
p_{13}(t) = F_{13}(t) &= \frac{\int_0^{\infty} [1 - e^{-\lambda_2(t+\tau)} - 1 + e^{-\lambda_2\tau}] \lambda_1 e^{-\lambda_1\tau} d\tau}{p_{01}} = \\
&= \frac{\lambda_1}{p_{01}} \int_0^{\infty} (1 - e^{-\lambda_2\tau}) e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\tau} d\tau = \frac{\lambda_1(1 - e^{-\lambda_2t})}{p_{01}} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\tau} d\tau = \\
&= \frac{\lambda_1}{p_{01}} \cdot \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)} [1 - e^{-\lambda_2t}] = 1 - e^{-\lambda_2t}.
\end{aligned}$$

Аналогічно:

$$p_{23} = 1 - e^{-\lambda_1 t}.$$

Перетворюючи за Лапасом, отримаємо:

$$\begin{aligned}
p_{01}^*(s) &= \frac{\lambda_1}{s + \lambda_1 + \lambda_2}; \quad p_{02}^*(s) = \frac{\lambda_2}{s + \lambda_1 + \lambda_2}; \\
p_{13}^*(s) &= \frac{\lambda_2}{s + \lambda_2}; \quad p_{23}^*(s) = \frac{\lambda_1}{s + \lambda_1}.
\end{aligned}$$

Для відшукування щільності розподілу тривалості перебування в підмножині $\{0; 1; 2\}$ до потрапляння у відмовний стан використовуємо систему рівнянь:

$$\varphi_k^*(s) - \sum_{r \in E_0} \varphi_r^*(s) p'_{kr}(s) = \sum_{r \in E_1} p'_{kr}(s),$$

де E_0 — підмножина працездатних станів, E_1 — підмножина відмовних станів.

Відповідно до цього рівняння щодо зображення щільностей розподілу тривалостей перебування в підмножині працездатних станів $\{0; 1; 2\}$ до переходу у відмовний стан мають вигляд:

$$\begin{cases} \varphi_0^*(s) = p'_{01}(s) \cdot \varphi_1^*(s) + p'_{02}(s) \cdot \varphi_2^*(s) = 0. \\ \varphi_1^*(s) = p_{13}^*(s) = \frac{\lambda_2}{s + \lambda_2}; \\ \varphi_2^*(s) = p_{23}^*(s) = \frac{\lambda_1}{s + \lambda_1}. \end{cases}$$

Звідси:

$$\begin{aligned}
\varphi_0^*(s) &= p'_{01}(s) \cdot p'_{13}(s) + p'_{02}(s) \cdot p'_{23}(s), \\
\varphi_1(t) &= \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}, \\
\varphi_2(t) &= \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}.
\end{aligned}$$

Підставляючи $p'_{01}(s)$, $p'_{02}(s)$, $p'_{13}(s)$ і $p'_{23}(s)$ у рівняння для $\varphi_0^*(s)$, отримаємо:

$$\begin{aligned}
\varphi_0^*(s) &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(s + \lambda_1 + \lambda_2)(s + \lambda_2)} + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(s + \lambda_1 + \lambda_2)(s + \lambda_1)} = \\
&= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{s + \lambda_1 + \lambda_2} \cdot \frac{2s + \lambda_1 + \lambda_2}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} = \frac{a}{s + \lambda_1} + \frac{b}{s + \lambda_2} + \frac{c}{s + \lambda_1 + \lambda_2} = \\
&= \frac{as^2 + as(\lambda_1 + 2\lambda_2) + a\lambda_1\lambda_2 + a\lambda_2^2 + bs^2 + bs(\lambda_2 + 2\lambda_1)}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)(s + \lambda_1 + \lambda_2)} = \\
&= \frac{s^2(a + b + c) + s[a(\lambda_1 + 2\lambda_2) + b(\lambda_2 + 2\lambda_1) + c(\lambda_1 + \lambda_2)]}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)(s + \lambda_1 + \lambda_2)} + \\
&\quad + \frac{\lambda_1\lambda_2 a + b + c + a\lambda_2^2 + b\lambda_1^2}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)(s + \lambda_1 + \lambda_2)}.
\end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти за однакових ступенів s у чисельнику виразів ліворуч і праворуч від знака рівності, побудуємо підсумкову систему рівнянь:

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ a(\lambda_1 + 2\lambda_2) + b(\lambda_2 + 2\lambda_1) + c(\lambda_1 + \lambda_2) = 2\lambda_1\lambda_2, \\ \lambda_1\lambda_2(a + b + c) + a\lambda_2^2 + b\lambda_1^2 = \lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2). \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему відносно a , b і c , отримаємо:

$$a = \lambda_1, b = \lambda_2, c = -(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Тоді:

$$\varphi_0^*(s) = \frac{\lambda_1}{s + \lambda_1} + \frac{\lambda_2}{s + \lambda_2} - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c + \lambda_1 + \lambda_2}.$$

При цьому:

$$\varphi_0(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} - (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}.$$

Розв'язок задачі отримано.

Проведемо стислий аналіз сутності та обчислювальної схеми технології розв'язання задачі. Логічна структура і математичний інструментарій запропонованого методу розв'язання поставленої задачі прості, зрозумілі і, що найважливіше, не залежать від характеру аналітичного опису густин розподілу тривалостей перебування системи в кожному з можливих її станів. Очікувані труднощі можуть виникнути під час аналітичного виконання прямого і зворотного перетворень Лапласа. Однак чисельний розв'язок доступний і може бути отриманий завжди. Можливі проблеми високої розмірності графа станів і переходів системи переборні з використанням відомих методів укрупнення станів. При цьому шукане рішення досягається ітераційно.

Висновки

Запропоновано й обґрунтовано метод відшукування густини розподілу тривалості перебування напівмарковської системи на виділеній множині станів до переходу в певний заданий стан. Важлива перевага методу полягає в тому, що відповідний алгоритм і обчислювальна процедура його реалізації не залежать від характеру аналітичного опису густин розподілу тривалостей перебування системи в кожному з можливих її станів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Excursions of Markov Processes: A Large Deviation Approach / Logachov A. V. et al. *Markov Processes And Related Fields*. 2023. V. 29, Issue 2. P. 189–197
2. Ivo Adan, Johan van Leeuwen, Jori Selen. Analysis of structured Markov processes. *Research Gate*. September, 2017. URL: https://www.researchgate.net/publication/320055089_Analysis_of_structured_Markov_processes. DOI: [10.48550/arXiv.1709.09060](https://doi.org/10.48550/arXiv.1709.09060).
3. Hiroki Ogata, Luis Iván Hernández Ruíz, Kouji Yano. Asymptotic normality in multi-dimension of nonparametric estimators for discrete-time semi-Markov chains. *arXiv:2304.03924*. April 2023. URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2304.03924> (05.06.2025).
4. Hervé Cardot, Cindy Frasca. Hypothesis testing for Panels of Semi-Markov Processes with parametric sojourn time distributions. *Journal of Statistical Planning and Inference*. January 2024. Volume 228. P. 59–79
5. Silvestrov D. Algorithms of Phase Space Reduction and Asymptotics of Hitting Times for Perturbed Semi-Markov Processes. *arXiv:1907.03529*. July 2019. URL: <https://arxiv.org/abs/1907.03529> (05.06.2025).
6. Limnios N., Swishchuk A. Discrete-Time Semi-Markov Random Evolutions in Asymptotic Reduced Random Media with Applications. *Mathematics*. 2020. №8 (6). P. 963. <https://doi.org/10.3390/math8060963>.
7. Kelli Francis-Staite, Langford White. Analysis of Sojourn Time Distributions for Semi-Markov Models. *arXiv:2206.10865v1*. 2022. URL: <https://arxiv.org/pdf/2206.10865>.
8. Kozłowski E., Borucka A., Oleszczuk P., Leszczyński N. Evaluation of Readiness of the Technical System Using the Semi-Markov Model with Selected Sojourn Time Distributions. *Eksploracja i Niezawodność*. 2024. V. 26. P. 1–15. <http://dx.doi.org/10.17531/ein/191545>. URL: <https://repo.bg.wat.edu.pl/info/article/WAT6be545b74181463e8f674c9be1e48f37/>. (05.06.2025).
9. Andreas C. Georgiou, Alexandra Papadopoulou, Pavlos Kolias, Haris Palikouris. On State Occupancies, First Passage Times, and Duration in Non-Homogeneous Semi-Markov Chains. *Mathematics*. July 2021. №9 (15). URL: <https://ideas.repec.org/a/gam/jmathe/v9y2021i15p1745-d600539.html> (05.06.2025).
10. Akaninyene Udo Udom. A semi-Markov model for the duration of stay in a non-homogenous academic manpower system. URL: <https://www.ajol.info/index.php/gjmas/article/view/48011> (05.06.2025).

Стаття надійшла до редакції 05.06.2025.

Стаття пройшла рецензування 10.06.2025.

Раскін Лев Григорович – д-р техн. наук, професор, професор кафедри програмної інженерії та інтелектуальних технологій управління, e-mail: topology@ukr.net; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9015-4016>.

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут».

Сухомлин Лариса Вадимівна – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри менеджменту, e-mail: lar.sukhomlyn@gmail.com, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9511-5932>.

Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського.

Соколов Дмитро Дмитрович – аспірант кафедри програмної інженерії та інтелектуальних технологій управління, e-mail: sokolovddd@gmail.com, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4558-9598>.

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут».

Власенко Віталій Владиславович – аспірант кафедри програмної інженерії та інтелектуальних технологій управління, e-mail: vitalik.vlasenko.000@gmail.com, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5427-0223>.

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут».

Гатунов Артур Павлович – аспірант кафедри програмної інженерії та інтелектуальних технологій управління, e-mail: gatunovartur@gmail.com, ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-4444-3817>.

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут».

Андрієнко Сергій Олексійович – аспірант кафедри програмної інженерії та інтелектуальних технологій управління, e-mail: SergeyAndrienko1206@gmail.com, ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-4036-9877>.

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут».