

**Л. Г. Раскін, д-р техн. наук, проф.; Л. В. Сухомлин, канд. техн. наук, доц.;
В. В. Карпенко, канд. техн. наук; Д. Д. Соколов; В. В. Власенко; С. О. Андрієнко**

ОЦІНКА ЕФЕКТИВНОСТІ НЕЧІТКИХ МАРКОВСЬКИХ СИСТЕМ

Стандартні технології оцінки ефективності функціонування систем базуються на побудові та використанні математичних моделей функціонування таких систем. Досліджувана проблема – вдосконалення методу оцінки ефективності роботи системи від значень її параметрів. Суть проблеми полягає в наступному: зазвичай припускають, що чисельні значення всіх компонентів співвідношення визначаються точно, що не завжди і не цілком відповідає реальній дійсності. Адекватність будь-якої моделі і ступінь доцільності її використання визначаються реальним рівнем точності завдання вихідних даних. Об'єкт дослідження – технологія оцінки ефективності функціонування системи в умовах невизначеності вихідних даних. Актуальність дослідження визначається фактичною недостатністю відомого математичного інструментарію оцінки ефективності системи в умовах, коли параметри системи описані неточно, наприклад, в термінах теорії нечітких множин. Мета дослідження – розробка аналітичного методу оцінки ефективності функціонування систем для випадку, коли параметри системи і середовища описані функціями належності нечітких чисел (L-R)-типу. Метод вирішення задачі – побудова функції належності нечіткого значення критерію ефективності системи, що адекватно відображає якість функціонування системи і точність розрахунку критерію. Поставлена задача вирішена з урахуванням особливостей функціонування марковських систем масового обслуговування. При цьому, отримано шуканий вираз для розрахунку теоретико-ймовірнісного аналога функції належності нечіткого значення основного критерію ефективності таких систем, в якості якого обрано ймовірність зайнятості всіх каналів системи (тобто ймовірність відмови в обслуговуванні). Розв'язок задачі було отримано для спеціального, найбільш ефективного і часто використовуваного способу опису нечіткості параметрів систем і зовнішнього середовища.

Ключові слова: оцінка ефективності марковських систем обслуговування, нечіткі вихідні дані, функція належності (L-R)-типу.

Вступ

Традиційно технологія оцінки ефективності систем масового обслуговування, що використовується, базується на марковських моделях таких систем [1, 2]. При цьому передбачається, що на вхід n -канальної системи обслуговування надходить пуассонівський потік вимог інтенсивності α а процес обслуговування описується експоненціальним розподілом випадкової тривалості обслуговування з інтенсивністю μ . У найпростішій такій системі, якщо в момент надходження на її вхід чергової заявки вхідного потоку всі канали системи зайняті, то заявка отримує відмову.

Імовірність того, що в довільний момент часу в системі будуть зайняті k каналів, описується відомою формулою Ерланга [3]:

$$P_k = \frac{\frac{y^k}{K!}}{\sum_{k=0}^n \frac{y^k}{K!}}, K = 0, 1, 2, \dots, n; y = \frac{\alpha}{\mu}.$$

При цьому для $K = n$ (всі канали зайняті) маємо:

$$P_{отк} = \frac{\frac{y^n}{n!}}{\sum_{k=0}^n \frac{y^k}{K!}}. \quad (1)$$

Розглянемо реальну ситуацію, коли основні параметри системи обслуговування λ та μ не можуть бути оцінені точно, наприклад, у випадку малої вибірки вихідних даних. Можливий і природний шлях до вирішення завдання оцінки ефективності системи в цьому випадку полягає у використанні технологій нечіткої математики [4 – 6]. Проблема, що виникає при цьому, полягає у відсутності повної системи правил виконання алгебраїчних операцій над нечіткими числами. Відомі розрахункові системи включають в себе правила виконання тільки чотирьох арифметичних операцій, що, як буде показано, недостатньо. Ця обставина ініціює дослідження в напрямку вдосконалення відомої системи правил нечіткої математики.

Аналіз відомих результатів

Правила виконання арифметичних операцій над нечіткими числами широко обговорювалися. У великій кількості робіт, наприклад, у [7 – 12] наведено різні набори правил нечіткої арифметики. У [13] було проведено їх детальний аналіз, помилкові правила виявлено та належним чином виправлено. Отримана в результаті теоретично обґрунтована та рекомендована для використання система правил нечіткої арифметики наведена нижче.

Задамо два нечітких числа $(L-R)$ – типу своїми функціями належності $x_1 = \langle m_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle$, $x_2 = \langle m_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle$.

Відтворимо зазначені правила [13] виконання арифметичних операцій над введеними числами x_1 та x_2 .

Додавання: $z = x_1 + x_2$; $z = \langle m, \alpha, \beta \rangle$,

$$\min(x_1 + x_2) = (m_1 - \alpha_1) + (m_2 - \alpha_2) = (m_1 + m_2) - (\alpha_1 + \alpha_2),$$

$$\max(x + y) = (m_1 + \beta_1) + (m_2 + \beta_2) = (m_1 + m_2) + (\beta_1 + \beta_2),$$

тоді

$$m = m_1 + m_2; \alpha = \alpha_1 + \alpha_2; \beta = \beta_1 + \beta_2.$$

Віднімання: $z = x_1 - x_2$; $z(m, \alpha, \beta)$,

$$\min z = (m_1 - \alpha_1) - (m_2 + \beta_2) = (m_1 - m_2) - (\alpha_1 + \beta_2),$$

$$\max z = (m_1 + \beta_1) - (m_2 - \alpha_2) = (m_1 - m_2) + (\beta_1 + \alpha_2),$$

тоді

$$m = m_1 - m_2; \alpha = \alpha_1 + \beta_2; \beta = \beta_1 + \alpha_2.$$

Правила виконання операцій множення і ділення залежать від положення носіїв чисел x_1 та x_2 відносно нуля. Наведемо ці правила для різних варіантів співвідношень між m_1, α_1, β_1 та m_2, α_2, β_2 .

Варіант 1.

Множення: $z = x_1 \cdot x_2$; $z = \langle m, \alpha, \beta \rangle$; $m = m_1 \cdot m_2$.

$$\min z = (m_1 - \alpha_1) \cdot (m_2 - \alpha_2) = m_1 m_2 - m_1 \alpha_2 - m_2 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2,$$

$$\max z = (m_1 + \beta_1) \cdot (m_2 + \beta_2) = m_1 m_2 + m_1 \beta_2 + m_2 \beta_1 + \beta_1 \beta_2,$$

$$\alpha = m_1 m_2 - (m_1 m_2 - m_1 \alpha_2 - m_2 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2) = m_1 \alpha_2 + m_2 \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_2,$$

$$\beta = m_1 m_2 + m_1 \beta_2 + m_2 \beta_1 + \beta_1 \beta_2 - m_1 m_2 = m_1 \beta_2 + m_2 \beta_1 + \beta_1 \beta_2.$$

Поділ: $z = \frac{x_1}{x_2} = \langle \frac{m_1}{m_2}; \alpha; \beta \rangle$; $m = \frac{m_1}{m_2}$.

$$\min z = \frac{m_1 - \alpha_1}{m_2 + \beta_2}, \max z = \frac{m_1 + \beta_1}{m_2 - \alpha_2},$$

$$\alpha = \frac{m_1}{m_2} - \frac{m_1 - \alpha_1}{m_2 + \beta_2} = \frac{m_1 m_2 + m_1 \beta_2 - m_1 m_2 + m_2 \alpha_1}{m_2 (m_2 + \beta_2)} = \frac{m_2 \alpha_1 + m_1 \beta_2}{m_2 (m_2 + \beta_2)},$$

$$\beta = \frac{m_1 + \beta_1}{m_2 - \alpha_2} - \frac{m_1}{m_2} = \frac{m_1 m_2 + m_2 \beta_1 - m_1 m_2 + m_1 \alpha_2}{m_2 (m_2 - \alpha_2)} = \frac{m_1 \alpha_2 + m_2 \beta_1}{m_2 (m_2 - \alpha_2)}.$$

Варіант 2.

Множення: $z = x_1 \cdot x_2$; $m = m_1 \cdot m_2$.

$$\min z = (m_1 - \alpha_1) \cdot (m_2 + \beta_2) = m_1 m_2 + m_1 \beta_2 - m_2 \alpha_1 - \alpha_1 \beta_2,$$

$$\max z = (m_1 + \beta_1) \cdot (m_2 + \beta_2) = m_1 m_2 + m_1 \beta_2 + m_2 \beta_1 + \beta_1 \beta_2,$$

$$\alpha = m_1 m_2 - (m_1 m_2 + m_1 \beta_2 - m_2 \alpha_1 - \alpha_1 \beta_2) = m_2 \alpha_1 - m_1 \beta_2 + \alpha_1 \beta_2,$$

$$\beta = m_1 m_2 + m_1 \beta_2 + m_2 \beta_1 + \beta_1 \beta_2 - m_1 m_2 = m_1 \beta_2 + m_2 \beta_1 + \beta_1 \beta_2.$$

Поділ: $z = \frac{x_1}{x_2} = \langle m; \alpha; \beta \rangle$; $m = \frac{m_1}{m_2}$.

$$\min z = \frac{m_1 - \alpha_1}{m_2 + \beta_2}, \quad \max z = \frac{m_1 + \beta_1}{m_2 - \alpha_2}.$$

Результат виконання операції ділення в цьому випадку повторює отриманий вище.

Варіант 3.

Множення: $z = x_1 \cdot x_2$; $m = m_1 \cdot m_2$.

$$\min z = \min \{ (m_1 - \alpha_1)(m_2 + \beta_2); (m_2 - \alpha_2)(m_1 + \beta_1) \} =$$

$$= \min \{ (m_1 m_2 + m_1 \beta_2 - m_2 \alpha_1 - \alpha_1 \beta_2); (m_1 m_2 + m_2 \beta_1 - m_1 \alpha_2 - \alpha_2 \beta_1) \}.$$

$$\max z = \max \{ (m_1 - \alpha_1)(m_2 - \alpha_2); (m_1 + \beta_1)(m_2 + \beta_2) \} =$$

$$= \max \{ (m_1 m_2 - m_1 \alpha_2 - m_2 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2); (m_1 m_2 + m_1 \beta_2 + m_2 \beta_1 + \beta_1 \beta_2) \}.$$

$$\alpha = m_1 m_2 - \min \{ (m_1 m_2 + m_1 \beta_2 - m_2 \alpha_1 - \alpha_1 \beta_2);$$

$$(m_1 m_2 + m_2 \beta_1 - m_1 \alpha_2 - \alpha_2 \beta_1) \};$$

$$\beta = \max \{ (-m_1 \alpha_2 - m_2 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2)(m_1 \beta_2 + m_2 \beta_1 + \beta_1 \beta_2) \}.$$

Операція ділення в цьому варіанті нездійсненна, оскільки інтервал-носії дільника накриває нуль. Таким чином, описано систему правил виконання арифметичних операцій над нечіткими числами ($L-R$) – типу.

Слід тепер зазначити, що для вирішення численних завдань оцінки ефективності складних систем та інших подібних завдань наведена система правил нечіткої арифметики виявляється недостатньою і її необхідно доповнити. Зокрема, при виконанні великої кількості практичних обчислень необхідна операція піднесення до степеня. Ця операція використовується, наприклад, у формулі (1) для оцінки ефективності систем масового обслуговування. Відповідно до цього, початкова мета дослідження – розробка технології оцінки ефективності марковських систем обслуговування в умовах нечітких вихідних даних – може бути досягнута тільки при необхідному вдосконаленні комплексу правил виконання операцій. Для досягнення цієї мети потрібно вирішити завдання розробки правила виконання операції піднесення до степеня нечіткого числа ($L-R$) – типу.

Мета дослідження

Треба вирішити задачу оцінки ефективності функціонування марковської системи масового обслуговування в умовах, коли параметри системи задані нечітко. Також треба отримати співвідношення для розрахунку функції належності нечіткого числа, що задає ймовірність зайнятості всіх каналів системи.

Матеріали та методи вирішення задачі оцінки ефективності нечітких марковських систем обслуговування.

Виконаємо деяку необхідну підготовчу роботу. Введемо нечіткі числа Z_1 та Z_2 з функціями належності ($L-R$) типу: $Z_1 = \langle m_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle$, $Z_2 = \langle m_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle$. Запишемо функцію належності добутку цих чисел [13]:

$$\begin{aligned} Z &= Z_1 Z_2; \quad Z = \langle m, \alpha, \beta \rangle, m = m_1 m_2; \alpha = m_1 \alpha_2 + m_2 \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_2; \\ \beta &= m_1 \beta_2 + m_2 \beta_1 + \beta_1 \beta_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Нехай тепер $Z_1 = Z_2 = \langle m, \alpha, \beta \rangle$;

Тоді, природно, $m_1 = m_2 = m$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta$. Знайдемо тепер функцію належності числа $Z = Z_1 Z_2 = Z^2 = \langle m^{(2)}, \alpha^{(2)}, \beta^{(2)} \rangle$. При цьому, відповідно до (2):

$$m^{(2)} = m^2, \quad (3)$$

$$\alpha^{(2)} = m\alpha + m\alpha - \alpha^2 = 2m\alpha - \alpha^2, \quad (4)$$

$$\beta^{(2)} = m\beta + m\beta + \beta^2 = 2m\beta + \beta^2. \quad (5)$$

Знайдемо далі функцію належності числа

$$Z^3 = Z^2 Z = Z^{(2)} Z = \langle m^{(2)} \alpha^{(2)} \beta^{(2)} \rangle \langle m, \alpha, \beta \rangle = \langle m^{(3)} \alpha^{(3)} \beta^{(3)} \rangle. \quad (6)$$

Відповідно до (2)–(5) маємо

$$m^{(3)} = m^{(2)} m = m^2 m = m^3, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \alpha^{(3)} &= m^{(2)} \alpha + m \alpha^{(2)} - \alpha^{(2)} \alpha = m^2 \alpha + (2m\alpha - \alpha^2) - (2m\alpha - \alpha^2) \alpha = \\ &= m^2 \alpha + 2m^2 \alpha - m\alpha^2 - 2m\alpha^2 + \alpha^3 = 3m^2 \alpha - 3m\alpha^2 + \alpha^3; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \beta^{(3)} &= m^{(2)} \beta + m \beta^{(2)} + \beta^{(2)} \beta = m^2 \beta + m(2m\beta + \beta^2) + (2m\beta + \beta^2) \beta = \\ &= m^2 \beta + 2m^2 \beta + m\beta^2 + 2m\beta^2 + \beta^3 = 3m^2 \beta + 3m\beta^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Тепер визначимо мінімальне і максимальне значення квадрата і куба непарних чисел $(L-R)$ – типу.

За визначенням:

$$\begin{aligned} \min Z^{(2)} &= m^{(2)} - \alpha^{(2)}; \\ \max Z^{(2)} &= m^{(2)} + \beta^{(2)}; \\ \min Z^{(3)} &= m^{(3)} - \alpha^{(3)}; \\ \max Z^{(3)} &= m^{(3)} + \beta^{(3)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Розрахуємо ці значення з використанням (3) – (10). При цьому отримаємо

$$\begin{aligned} \min Z^{(2)} &= m^2 - 2m\alpha + \alpha^2 = (m - \alpha)^2 = \min(Z^{(1)})^2, \\ \max Z^{(2)} &= m^2 + 2m\beta + \beta^2 = (m + \beta)^2 = \max(Z^{(1)})^2, \\ \min Z^{(3)} &= m^3 - 3m^2 \alpha + 3m\alpha^2 - \alpha^3 = (m - \alpha)^3 = \min(Z^{(1)})^3, \\ \max Z^{(3)} &= m^3 + 3m^2 \beta + 3m\beta^2 + \beta^3 = (m + \beta)^3 = \max(Z^{(1)})^3. \end{aligned} \quad (11)$$

Отримані співвідношення узгоджуються із змістом їхнього завдання, тобто вони є абсолютно очікуваними. З іншого боку, справедливості співвідношень (8) – (11) доводиться з використанням методу повної математичної індукції.

Таким чином, для зведення нечіткого числа $Z = \langle m, \alpha, \beta \rangle$ $(L-R)$ – типу в довільну ступінь можна використовувати природне співвідношення:

$$Z^n = Z^{(n)} = \langle m^{(n)}, \alpha^{(n)}, \beta^{(n)} \rangle, \quad (12)$$

де

$$m^{(n)} = m^n; \alpha^{(n)} = m^n - (m - \alpha)^n; \beta^{(n)} = (m + \beta)^n - m^n. \quad (13)$$

Продовжимо підготовчі розрахунки. Введемо нечіткі числа

$$\lambda = \langle m_\lambda, \alpha_\lambda, \beta_\lambda \rangle, \mu = \langle m_\mu, \alpha_\mu, \beta_\mu \rangle, \gamma = \frac{\lambda}{\mu}, \quad (14)$$

$$\gamma = \langle m_\gamma, \alpha_\gamma, \beta_\gamma \rangle; m_\gamma = \frac{m_\lambda}{m_\mu}. \quad (15)$$

Знайдемо α_γ та β_γ . Для $Z_1 = \langle m_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle, z_2 = \langle m_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle$ відповідно до [13] маємо

$$\gamma = \frac{z_1}{z_2} = \langle m_\gamma, \alpha_\gamma, \beta_\gamma \rangle \quad (16)$$

$$m_\gamma = \frac{m_1}{m_2}, \alpha_\gamma = \frac{m_2 \alpha_1 + m_1 \beta_2}{m_2 (m_2 + \beta_2)}, \beta_\gamma = \frac{m_1 \alpha_2 + m_2 \beta_1}{m_2 (m_2 - \alpha_2)}. \quad (17)$$

Розглянемо приклад. Нехай чітко задано $\lambda = 2, \mu = 3, n = 2$. При цьому

$$\gamma = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3}.$$

Застосовуючи формули Ерланга [3], розрахуємо ймовірність відмови

$$P_{отк} = \frac{\frac{\gamma^2}{2!}}{\sum_{K=0}^2 \frac{\gamma^K}{K!}} = \frac{\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9 \cdot 2}} = \frac{0,222}{1,888} = 0,12.$$

Оцінимо тепер ефективність описаної двоканальної системи обслуговування для випадку, коли вихідні дані визначені в термінах нечіткої математики функціями належності $(L-R)$ -типу

$$\lambda = \langle m_\lambda, \alpha_\lambda, \beta_\lambda \rangle = \langle 2; 1; 1 \rangle,$$

$$\mu = \langle m_\mu, \alpha_\mu, \beta_\mu \rangle = \langle 3; 1; 2 \rangle.$$

Для наближеної оцінки ефективності нечітких систем можна використовувати деякі ідентифікуючі інформативні оцінки значень ймовірності відмови цих систем у різних умовах їх функціонування. З цією метою, зокрема, для отримання середньої (очікуваної) оцінки ймовірності відмови у формулу (1) підставляють очікувані значення λ та μ . При цьому отримаємо обчислене вище значення $P_{отк} = 0,12$. Песимістична оцінка буде отримана, якщо інтенсивність вхідного потоку задати максимальною, а інтенсивність обслуговування – мінімальною. При цьому для $\lambda = 3$ та $\mu = 2$

$$P_{отк}^{пес} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1,125}{1 + 1,5 + 1,125} = 0,31.$$

Нарешті, для отримання оптимістичної оцінки задамо $\lambda = 1, \mu = 5$.

Тоді

$$P_{отк}^{пес} = \frac{(0,2)^2 \cdot \frac{1}{2}}{1 + 0,2 + \frac{(0,2)^2}{2}} = \frac{0,02}{1 + 0,2 + 0,02} = 0,016.$$

Якість отриманих при цьому оцінок ефективності системи очевидно істотно залежить від довжини інтервалів завдання функцій належності нечітких її параметрів.

Отримані результати

Отримані результати розрахунків переконливо демонструють високу важливість

забезпечення необхідної точності оцінок параметрів системи. Великий розкид значень песимістичних і оптимістичних оцінок ефективності системи відносно середнього значення свідчить про низьку інформативність цих результатів у розглянутому випадку. Більш адекватна і змістовна оцінка ефективності системи може бути отримана при використанні теоретико-ймовірнісного трактування вихідних нечітких даних про параметри системи. Відповідна технологія реалізується покроково наступним чином. Для ясності виконаємо всі необхідні операції стосовно найпростішого окремого випадку, коли система є двоканальною ($n = 2$).

Крок 1. Розрахунок функції належності нечіткого числа $\gamma = \frac{\lambda}{\mu}$.

З використанням співвідношень (14) – (16) маємо

$$\gamma = \langle m_\gamma, \alpha_\gamma, \beta_\gamma \rangle, \\ m_\gamma = \frac{m_\lambda}{m_\mu}; \alpha_\gamma = \frac{m_\mu \alpha_\lambda + m_\lambda \beta_\mu}{m_\mu (m_\mu + \beta_\mu)}; \beta_\gamma = \frac{m_\gamma \alpha_\mu + m_\mu \beta_\lambda}{m_\mu (m_\mu - \alpha_\mu)}. \quad (18)$$

Крок 2. Розрахунок функції належності нечітких чисел $\gamma^K, K=1,2,...,n$. Для розглянутого окремого випадку ($K=2$) всі необхідні співвідношення були отримані вище (формули (12–13)). При цьому

$$\lambda = \langle m_\lambda, \alpha_\lambda, \beta_\lambda \rangle, \mu = \langle m_\mu, \alpha_\mu, \beta_\mu \rangle; \quad (19)$$

$$\gamma = \frac{\lambda}{\mu} = \langle m_\gamma, \alpha_\gamma, \beta_\gamma \rangle; \\ m_\gamma = \frac{m_\lambda}{m_\mu}, \alpha_\gamma = \frac{m_\mu \alpha_\lambda + m_\lambda \beta_\mu}{m_\mu (m_\mu + \beta_\mu)}, \beta_\gamma = \frac{m_\lambda \alpha_\mu + m_\mu \beta_\lambda}{m_\mu (m_\mu - \alpha_\mu)}. \quad (20)$$

Крок 3. Розрахунок функції належності нечіткого числа

$$C = \sum_{k=0}^n \frac{\gamma^k}{k!} = 1 + \gamma + \frac{\gamma^2}{2} + \dots + \frac{\gamma^n}{n!}.$$

Для $n = 2$ маємо

$$C = 1 + \gamma + \frac{\gamma^2}{2} = C_0 + C_1 + C_2, \\ C_0 = 1 = \langle m_{C_0}, \alpha_{C_0}, \beta_{C_0} \rangle, C_1 = \gamma = \langle m_{C_1}, \alpha_{C_1}, \beta_{C_1} \rangle, C_2 = \frac{\gamma^2}{2} = \langle m_{C_2}, \alpha_{C_2}, \beta_{C_2} \rangle. \\ m_{C_0} = 1, \alpha_{C_0} = 0, \beta_{C_0} = 0; m_{C_1} = m_\gamma, \alpha_{C_1} = \alpha_\gamma, \beta_{C_1} = \beta_\gamma; \\ m_{C_2} = \frac{1}{2} m^2, \alpha_{C_2} = \frac{(m^2 - (m - \alpha)^2)}{2}, \beta_{C_2} = \frac{(m^2 + (m + \beta)^2)}{2}. \quad (21)$$

Крок 4. Розрахунок функції належності нечіткого числа

$$g = P_{отк} = \frac{\frac{\gamma^2}{2}}{\gamma^2} = \frac{g_1}{g_2} = \langle m_g, \alpha_g, \beta_g \rangle.$$

Далі, використовуючи (15) – (16), маємо

$$m_g = \frac{m_{g_1}}{m_{g_2}}, \alpha_g = \frac{m_{g_2} \alpha_{g_1} + m_{g_1} \beta_{g_2}}{m_{g_2} (m_{g_2} + \beta_{g_2})}, \\ \beta_g = \frac{m_{g_1} \alpha_{g_2} + m_{g_2} \beta_{g_1}}{m_{g_2} (m_{g_2} - \alpha_{g_2})}. \quad (22)$$

Отримані співвідношення (17) – (22) визначають функцію належності нечіткого числа $\chi = P_{отк}$. Далі, з метою надання цьому значенню теоретико-ймовірного сенсу, обчислимо площу під кривою, що визначає функцію належності нечіткого числа d . Маємо

$$S_g = \int_0^{\infty} \chi(g) \alpha_g. \quad (23)$$

Специфічна конструкція правила опису та аналітичного представлення функцій належності для нечітких чисел $(L - R)$ -типу дозволяє легко виконати операцію інтегрування у співвідношенні (23). З цією метою розрахуємо довжину інтервалу невизначеності нечіткого числа g :

$$\begin{aligned} l = \alpha_g + \beta_g &= \frac{m_{g_2} \alpha_{g_2} + m_{g_1} \beta_{g_2}}{m_{g_2} (m_{g_2} + \beta_{g_2})} + \frac{m_{g_1} \alpha_{g_2} + m_{g_2} \beta_{g_1}}{m_{g_2} (m_{g_2} - \alpha_{g_2})} = \\ &= \frac{(m_{g_2} - \alpha_{g_2})(m_{g_2} \alpha_{g_1} + m_{g_1} \beta_{g_2}) + (m_{g_2} + \beta_{g_2})(m_{g_1} \alpha_{g_2} + m_{g_2} \beta_{g_1})}{m_{g_2} (m_{g_2} + \beta_{g_2})(m_{g_2} - \alpha_{g_1})} m = \\ &= \frac{m_{g_2}^2 \alpha_{g_1} + m_{g_2} m_{g_1} \beta_{g_2} - m_{g_2} \alpha_{g_1} \alpha_{g_2} - m_{g_1} \alpha_{g_1} \beta_{g_2} + m_{g_2} m_{g_1} \alpha_{g_2} + \\ &+ m_{g_2}^2 \beta_{g_1} + m_{g_1} \alpha_{g_2} \beta_{g_2} + m_{g_2} \beta_{g_1} \beta_{g_2}}{m_{g_2} (m_{g_2} + \beta_{g_2})(m_{g_2} - \alpha_{g_1})} qm = \\ &= \frac{m_{g_2} \alpha_{g_1} (m_{g_2} - \alpha_{g_2}) + m_{g_1} m_{g_2} (\beta_{g_2} + \alpha_{g_2}) + m_{g_2} \beta_{g_1} (m_{g_2} \beta_{g_2})}{m_{g_2} (m_{g_2} + \beta_{g_2})(m_{g_1} - \alpha_{g_1})}. \end{aligned}$$

Задамо функцію належності нечіткого числа g співвідношенням

$$\mu(g) = \begin{cases} 0, & g \leq m_g - \alpha_g, \\ \frac{g - (m_g - \alpha_g)}{\alpha_g}, & m_g - \alpha_g < g \leq m_g, \\ \frac{m_g + \beta_g - g}{\beta_g}, & m_g < g \leq m_g + \beta_g, \\ 0, & g > m_g + \beta_g. \end{cases} \quad (24)$$

Функція $\mu(g)$ задає трикутник з основою, рівною $l = \alpha_g + \beta_g$ і висотою, що дорівнює одиниці. Площа цього трикутника дорівнює $S = \frac{l}{2}$. Використовуючи отримані значення, розрахуємо $\bar{P}_{отк} = \frac{g}{S_g} f(g)$.

Можливі значення $\bar{P}_{отк}$ всюди невід'ємні, а інтеграл від функції $\bar{P}_{отк}(g)$ дорівнює 1. Тоді ця функція може бути використана для імовірнісної оцінки ефективності системи. В якості критерію ефективності функціонування системи природно вибрати ймовірність того, що обчислена за формулою:

$$\bar{P}_{отк}(\Delta) = \int_0^{\Delta} f(g) \alpha_g \quad (25)$$

оцінка ймовірності відмови не перевищить допустимого порогового значення Δ . При цьому, якщо $\Delta \leq m_g$, що цілком природно, то:

$$\begin{aligned}
P_{OTK}(\Delta) &= \int_{m_g - \alpha_g}^{\Delta} \frac{g - (m_g - \alpha_g)}{\alpha_g} \alpha_g = \\
&= \int_{m_g - \alpha_g}^{\Delta} \frac{g}{\alpha_g} \alpha_g - \int_{m_g - \alpha_g}^{\Delta} \frac{m_g - \alpha_g}{\alpha_g} \alpha_g = \\
&= \frac{g^2}{2\alpha_g} \left| \Delta - \frac{m_g - \alpha_g}{\alpha_g} g \right| \Delta = \\
&= \frac{\Delta^2 - (m_g - \alpha_g)^2}{2\alpha_g} - \frac{(m_g - \alpha_g)}{\alpha_g} (\Delta - m_g + \alpha_g) = \\
&= \frac{\Delta^2 - m_g^2 + 2m_g\alpha_g - \alpha_g^2 - 2m_g\Delta + 2m_g^2 - 2m_g\alpha_g + 2\Delta\alpha_g - 2m_g\alpha_g + 2\alpha_g^2}{2\alpha_g} = \\
&= \frac{1}{2\alpha_g} (\Delta^2 + m_g^2 + \alpha_g^2 - 2m_g\Delta + 2\Delta\alpha_g - 2m_g\alpha_g) = \\
&= \frac{1}{2\alpha_g} [\Delta - (m_g - \alpha_g)]^2.
\end{aligned} \tag{26}$$

При цьому, якщо $\Delta = m$, то співвідношення (26) спрощується до вигляду:

$$P_{OTK} = \frac{\alpha_g}{2}. \tag{27}$$

Якщо ж $\Delta > m$, то:

$$\begin{aligned}
P_{ОТК} &= \int_{m_g - \alpha_g}^{m_g} \frac{g - (m_g - \alpha_g)}{\alpha_g} \alpha_g + \int_{m_g}^{\Delta} \frac{(m_g + \beta_g) - g}{\beta_g} \alpha_g = \\
&= \frac{g^2}{2\alpha_g} \left| m_g - \alpha_g - \frac{(m_g - \alpha_g)}{\alpha_g} g \right|_{m_g - \alpha_g}^{m_g} + \frac{(m_g + \beta_g)}{\beta_g} g \left| m_g - \frac{g}{2\beta} \right|_{m_g}^{\Delta} = \\
&= \frac{1}{2\alpha_g} \left[m_g^2 - (m_g - \alpha_g)^2 \right] - \frac{(m_g - \alpha_g) [m_g - (m_g - \alpha_g)]}{\alpha_g} + \\
&+ \frac{(m_g + \beta_g)(\Delta - m_g)}{\beta_g} - \frac{(\Delta^2 - m_g^2)}{2\beta_g} = \frac{1}{2\alpha_g} (m_g^2 - m_g^2 + 2m_g\alpha_g - \alpha_g^2) - \\
&- \frac{1}{\alpha_g} (m_g^2 - m_g^2 + m_g\alpha_g - \alpha_g m_g + \alpha_g m_g - \alpha_g^2) + \\
&+ \frac{1}{\beta_g} (\Delta m_g - m_g^2 + \Delta\beta_g - m_g\beta_g) - \frac{1}{2\beta_g} (\Delta^2 - m_g^2) = \\
&= \frac{1}{2\alpha_g} (2m_g\alpha_g - \alpha_g^2 - 2m_g\alpha_g + 2\alpha_g^2) + \\
&+ \frac{1}{2\beta_g} (2\Delta m_g - 2m_g^2 + 2\Delta\beta_g - 2m_g\beta_g - \Delta^2 + m_g^2) = \\
&= \frac{\alpha}{2} + (2\Delta\beta_g - 2m_g\beta_g - \Delta^2 - m_g^2 + 2\Delta m_g) = \\
&= \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2\beta_g} [2\beta(\Delta - m_g) - (\Delta - m_g)^2] = \\
&= \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2\beta_g} (\Delta - m_g) [2\beta - (\Delta - m_g)].
\end{aligned} \tag{28}$$

При цьому, якщо $\Delta = m_g$, то отримане при цьому значення $P_{ОТК}$ дорівнює $\frac{\alpha}{2}$, що, природно, збігається з (27).

Обговорення отриманих результатів

Розглянуто завдання оцінки ефективності марковської системи масового обслуговування в умовах, коли вихідні дані – нечіткі числа $(L-R)$ - типу. Виведена формула для розрахунку функції належності нечіткого числа, що визначає ймовірність зайнятості всіх каналів системи. При цьому було отримано корисний проміжний результат – формулу для опису функції належності нечіткого числа, що виникає при зведенні в цілий ступінь нечіткої основи. Складність отриманого опису функції належності нечіткої оцінки ефективності системи ініціювала продовження дослідження в напрямку виведення співвідношення для розрахунку теоретико-ймовірнісного аналога функції належності нечіткого числа, що визначає ймовірність зайнятості всіх каналів системи. Було отримано співвідношення, що дозволяє визначити ймовірність того, що нечітке число, яке задає ймовірність зайнятості всіх каналів системи, не перевищує обраного допустимого порогового значення.

Висновки

Вирішено задачу оцінки ефективності функціонування марковської системи масового обслуговування в умовах, коли параметри системи задані нечітко. Отримано співвідношення для розрахунку функції належності нечіткого числа, що задає ймовірність зайнятості всіх

каналів системи. Отримано формулу для розрахунку ймовірності того, що нечітке число, яке визначає ймовірність зайнятості всіх каналів, не перевищує допустимого порогового значення.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Karatzoglou S., Köhler D., Beigl M. Semantic-Enhanced Multi-Dimensional Markov Chains on Semantic Trajectories for Predicting Future Locations. MDPI «Sensors». 2018, October. P. 2–27. <https://doi.org/10.3390/s18103582>.
2. Nazin A. V., Miller B. M. Robust Mirror Decent Algorithm for a Multi-Armed Bandit Governed by a Stationary Finite Markov Chain. IFAC Proceedings Volumes 2013. №9. P. 905–909.
3. Kaufmann A., Gupta M. Introduction to fuzzy arithmetics. Amsterdam: Van Nostrand, 1985. p. 282.
4. Dubois D., Prade H. Operations on fuzzy numbers. International Journal of Systems Science. 2007. №6. P. 613–626. <https://doi.org/10.1080/00207727808941724>.
5. Zadeh L.A. Fuzzy sets. Information and Control. 1965. №8. P. 338–353. URL: <https://ru.scribd.com/document/82445598/Fuzzy-Sets-Zadeh-1965>.
6. Elementary Operations on L–R Fuzzy Number / Abdul Alim et al. Scientific Research Publishing Inc. Advances in Pure Mathematics. 2015. Vol. 5, Issue 3. P. 131–136.
7. Asady B., Akbari M., Keramati M. A. Ranking fuzzy numbers by fuzzy mapping. International Journal of Computer Mathematics. 2011. Vol. 88, Issue 8. P. 1603–1618.
8. Raskin L., Sira O. Performing arithmetic operation over the (L-R) type fuzzy numbers. Eastern Europe Journal. 2020. Vol. 3, №4. P. 6–11. URL: <https://journals.urau.ua/eejet/article/view/203590>.

Стаття надійшла до редакції 16.09.2025.

Стаття пройшла рецензування 29.09.2025.

Раскін Лев Григорович – д-р техн. наук, професор, професор кафедри програмної інженерії та інтелектуальних технологій управління, e-mail: raskinlg@gmail.com, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9015-4016>.

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут».

Сухомлин Лариса Вадимівна – канд. пехн. наук, доцент, доцент кафедри менеджменту, e-mail: lar.sukhomlyn@gmail.com, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9511-5932>.
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського.

Карпенко Вячеслав Васильович – канд. техн. наук, старший викладач, старший викладач кафедри програмної інженерії та інтелектуальних технологій управління, e-mail: kvvkm1@gmail.com, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8378-129X>.

Соколов Дмитро Дмитрович – аспірант кафедри програмної інженерії та інтелектуальних технологій управління, e-mail: sokolovddd@gmail.com, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4558-9598>.

Власенко Віталій Владиславович – аспірант кафедри програмної інженерії та інтелектуальних технологій управління, e-mail: vitalik.vlasenko.000@gmail.com, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5427-0223>.

Андрієнко Сергій Олексійович – аспірант кафедри програмної інженерії та інтелектуальних технологій управління, e-mail: SergeyAndrienko1206@gmail.com, ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-4036-9877>.

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут».