

**В. І. Савуляк, д-р техн. наук, проф.; В. В. Шевченко**

## **МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ В ГІДРОПРИВОДІ СТАТИЧНОГО ЗАНУРЕННЯ ШПАЛЕРНИХ СТОВПЧИКІВ**

*Метою статті є розроблення математичної моделі гідроприводу установки для статичного занурення шпалерних стовпчиків у ґрунт із використанням водяної суспензії, а також дослідження динамічних процесів, що виникають в гідроприводі під час взаємодії робочого органа з ґрунтовим середовищем. Актуальність дослідження зумовлена потребою у підвищенні ефективності механізованих процесів встановлення опор у садівництві, виноградарстві та у будівельній галузі шляхом зменшення енерговитрат і динамічних навантажень на елементи обладнання.*

*У роботі розглянуто гідропривід установки, який забезпечує формування отвору в ґрунті та подальше встановлення шпалерного стовпчика за рахунок роботи гідроциліндра і подачі води під тиском через систему спеціальних насадок. Застосування водяної суспензії сприяє руйнуванню структури ґрунту в зоні контакту з робочим органом і зменшенню сил тертя між поверхнею отвору та інструментом. Для інтенсифікації процесу в гідравлічну схему можливе підключення генератора імпульсів тиску, який створюватиме пульсації в поришевій порожнині гідроциліндра та забезпечуватиме змінний характер сил занурення.*

*Математичну модель процесу побудовано у вигляді системи нелінійних диференціальних рівнянь, що описують витрати робочої рідини на характерних ділянках гідросистеми, зміну тисків у її порожнинах та рух поршня гідроциліндра разом із робочим органом. У моделі враховано стисливість робочої рідини, гідравлічні втрати, перетікання між зонами високого та низького тиску, а також сили опору ґрунту та тертя між робочим органом і стінками сформованого отвору. Рухомі елементи приводу подано як одномасову динамічну систему, що дозволяє адекватно відобразити характер їх переміщення в процесі занурення.*

*Отримана система рівнянь має виражений нелінійний характер і ускладнює аналітичне розв'язання, у зв'язку з чим для її дослідження доцільним є застосування числових методів. Запропонований підхід забезпечує можливість визначення основних кінематичних і силових параметрів процесу занурення, оцінювання впливу конструктивних і режимних параметрів гідроприводу на швидкість проникнення робочого органу в ґрунт та навантаження елементів гідросистеми.*

*Практична цінність результатів полягає у можливості використання розробленої математичної моделі для обґрунтування раціональних параметрів гідроприводу машин для встановлення шпалерних стовпчиків, оптимізації режимів їх роботи та прогнозування динамічних навантажень у процесі експлуатації. Отримані результати можуть бути використані під час проєктування нових та модернізації наявних гідрофікованих установок для формування отворів у ґрунті та монтажу опорних елементів без застосування ударних методів.*

**Ключові слова:** *гідравлічна система, гідроциліндр, математичне моделювання, нелінійні диференціальні рівняння, динаміка гідроприводу, сили опору ґрунту, тертя в ґрунтовому середовищі, числове інтегрування.*

### **Вступ**

Серед низки способів встановлення стовпчиків у садах, для огорожень тощо привертає увагу їх заглиблення з використанням води або суспензій. У будівництві, наприклад, найбільшого поширення знайшов метод встановлення паль шляхом їх забивання спеціальними машинами-копрами [1]. Для застосування цієї технології потрібні удароміцні палі та значні затрати допоміжного часу на підготовку та завершення операції. В роботі [2] виконано аналіз наявних методів занурення паль в ґрунт з використанням гідроударних пристроїв для різних методів заглиблення шляхом розмивання ґрунту. Показано, що тиск на ґрунт залежить від площі живого перерізу струменя та швидкості потоку в струмені води. Очевидно, що такий спосіб розмивання вимагає значних витрат рідини та енергії. У запропонованій роботі розглядається підхід до оптимізації процесу занурення стовпчиків з

використанням математичних моделей на основі нелінійних диференціальних рівнянь. Процес занурення технологічно розділений на два етапи: статичне занурення робочого інструменту до моменту, коли опір проникнення не досягне допустимого значення. Після цього режим роботи з статичного змінюється на динамічний з використанням імпульсів тиску, які збуджуються спеціальними генераторами.

### Моделювання процесів статичного етапу занурення

У методі, що розглядається, використовується гідрофікована установка, яка встановлює стовпи за два переходи. На першому, за допомогою гідроциліндра ГЦ та робочого органу РО, у ґрунті утворюють отвір потрібних розмірів та конфігурації, а потім у нього встановлюють стовпчик [2 – 9]. Для прискорення процесу в робочий орган під тиском подається вода через систему спеціальних насадок. Вода вимиває зруйнований ґрунт та змащує стінки отвору утвореною суспензією, що суттєво зменшує тертя між робочим органом та ґрунтом. Крім того, в схему гідроприводу можливо підключати спеціальний генератор тиску ГТ, який періодично викликає зміну тиску у поршневій порожнині гідроциліндра. Ці пульсації тиску та сили для заглиблення робочого органу в ґрунт дозволяють прискорити процес утворення отвору. Конструктивно гідроциліндр приводу з'єднаний з рамою трактора чи мобільної машини. Після досягнення потрібної глибини гідроциліндр витягує робочий орган, а в утворений отвір встановлюється стовпчик.

На рис. 1 показана розрахункова схема гідроприводу заглиблення шпалерних стовпчиків.

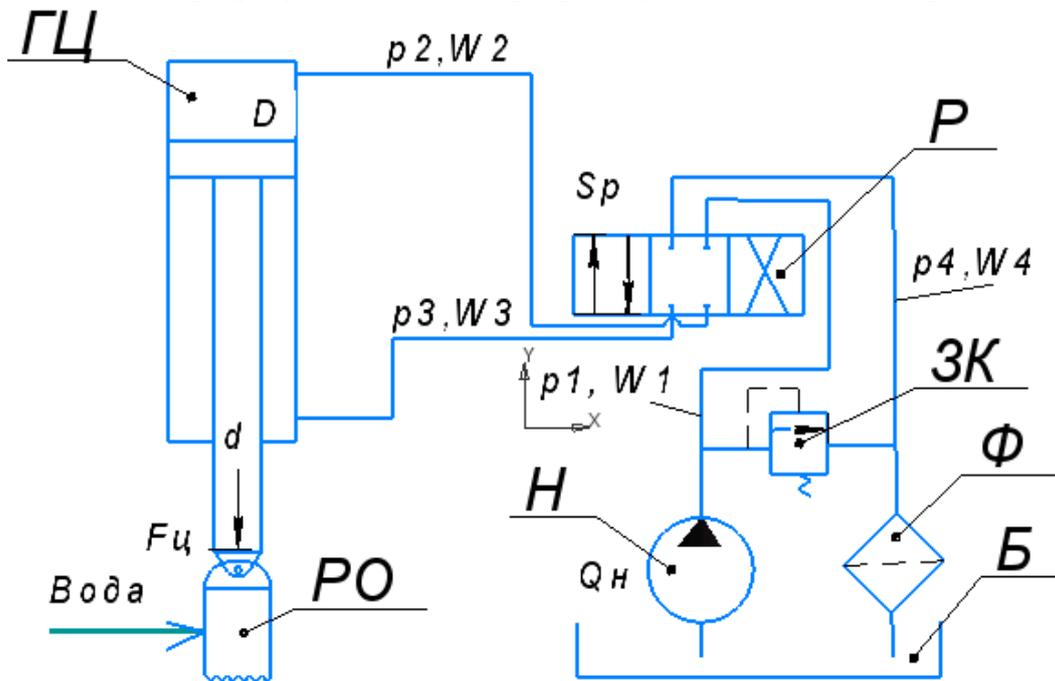


Рис. 1. Схема гідроприводу для встановлення шпалерних стовпчиків методом занурювання

На схемі позначені: Н – насос з фактичною продуктивністю  $Q_n$ , Б – бак з робочою рідиною, ЗК – запобіжний клапан, Ф – фільтр, Р – розподільник, гідроциліндр ГЦ з діаметром поршня  $D$  та штока  $d$ . Поршень розвиває зусилля  $F_c$ . Параметри тисків рідини  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ ,  $p_4$  та об'єми трубопроводів  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$ ,  $W_4$  показані на схемі.

При розробці математичної моделі роботи гідроприводу заглиблення шпалерних стовпчиків були прийняті такі припущення [10 – 13]:

- зусилля на штоці гідроциліндра, що занурює стовпчик у ґрунт є змінним на протязі одного циклу колювання і змінюється від мінімального на початку циклу занурення до максимального;

- зусилля занурення залежить від коефіцієнтів тертя між робочим органом та ґрунтом, а також від опору ґрунту проникненню робочого органу;

- рухомі частини приводу занурення (поршень зі штоком та приєднаний до них робочий

орган) приймаємо за одномасову систему, оскільки вони жорстко з'єднані між собою;

– гідроциліндр шарнірно з'єднаний з металоконструкцією машини, маса якої значно перевищує масу робочого органу з приводом занурення, а тому приймається нерухомим;

– робоча рідина є стисливою з коефіцієнтом стисливості  $K$ ;

– коефіцієнт стисливості робочої рідини мало залежить від тиску в гідросистемі, тому вважаємо його постійним;

– перетікання робочої рідини із порожнин з високим тиском в порожнини з низьким тиском пропорційні різниці тисків та коефіцієнту перетікання робочої рідини  $\sigma$ ;

– величина тиску на зливні з фільтра в маслобак є незначною;

– тертя між робочим органом та ґрунтом пропорційне площі дотику між ними;

– тертям в рухомих елементах гідроциліндра нехтуємо через відсутність суттєвих нормальних зусиль в парах тертя в ущільненнях.

З врахуванням припущень робота гідроприводу на операції занурення робочого органу може бути описана відповідною системою диференціальних (1 – 5) та алгебраїчних рівнянь (7 – 11) [10 – 13] з відповідними граничними умовами (6). Диференціальне рівняння (1) описує динамічний розподіл витрат робочої рідини на ділянці від насоса до гідророзподільника і враховує фактичну подачу насоса, витрати робочої рідини через розподільник, втрати робочої рідини на перетікання з області високого тиску в область низького тиску та деформацію трубопроводів. Диференціальне рівняння (2) описує зміну миттєвих витрат робочої рідини на ділянці від гідророзподільника до входу в гідроциліндр з врахуванням витрат робочої рідини через розподільник, витрат робочої рідини на переміщення поршня гідроциліндра, втрати робочої рідини на перетікання з області високого тиску в область низького тиску через зазори та деформацію трубопроводів. Диференціальне рівняння (3) описує баланс витрат робочої рідини на ділянці від виходу гідроциліндра до гідророзподільника включно і враховує витрати робочої рідини від переміщення поршня гідроциліндра, витрати робочої рідини через розподільник, втрати робочої рідини на перетікання з області високого тиску в область низького тиску через зазори та деформацію трубопроводів. Диференціальне рівняння (4) аналогічно описує баланс витрат робочої рідини на ділянці від гідророзподільника до фільтра і враховує витрати робочої рідини через розподільник, витрати робочої рідини через фільтр, втрати робочої рідини на перетікання з області високого тиску в область низького тиску через зазори та деформацію трубопроводів. Диференціальне рівняння (5) описує рух поршня гідроциліндра з робочим органом, враховуючи масу водопроводів з водою, і враховує силу, що розвиває гідроциліндр, силу інерції рухомих елементів, силу в'язкого тертя, силу опору ґрунту  $F_{oz}$  переміщенню торця робочого органу, сили тертя  $F_T$  між стінками отвору в ґрунті та робочим органом. Рівняння (6) описує нелінійні обмеження в математичній моделі, які викликані природою процесів у гідроприводі та його конструкцією.

$$Q_H = \mu S_P \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho_{PP}}} + \sigma(p_1 - p_2) + KW_1 \dot{p}_1; \quad (1)$$

$$\mu S_P \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho_{PP}}} = \dot{x} S_{Ц1} + \sigma(p_2 - p_3) + KW_2 \dot{p}_2; \quad (2)$$

$$\dot{x} S_{Ц2} = \mu S_P \sqrt{\frac{2(p_3 - p_4)}{\rho_{PP}}} + \sigma(p_3 - p_4) + KW_3 \dot{p}_3; \quad (3)$$

$$\mu S_P \sqrt{\frac{2(p_3 - p_4)}{\rho_{PP}}} = k_{\Phi} \frac{p_4}{\mu_D} S_{\Phi} + \sigma p_4 + KW_4 \dot{p}_4; \quad (4)$$

$$p_2 S_{Ц1} - p_3 S_{Ц2} = m_P \ddot{x} + \beta \dot{x} + p_B(\varepsilon) S_{П1} + F_T + F_{Or}; \quad (5)$$

$$0 \leq \{p_1, p_2, p_3, p_4\} \leq p_{зк}; \quad 0 \leq x \leq x_{max}, \quad (6)$$

$$S_{Ц1} = \frac{\pi D^2}{4}; \quad (7)$$

$$S_{Ц2} = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}; \quad (8)$$

$$G_B = V_K \rho_B g; \quad (9)$$

$$m_P = \frac{G_B + G_{П1} + G_{PO}}{g}; \quad (10)$$

$$\beta = \pi DL \frac{v_P}{\Delta}, \quad (11)$$

де  $p_{зк}$  – тиск спрацювання запобіжного клапана;

–  $x_{max}$  – максимальний хід гідроциліндра;

–  $v$  – кінематична в'язкість робочої рідини;

–  $L$  – довжина поверхні тертя штока гідроциліндра;

–  $\Delta$  – величина зазору між штоком і корпусом гідроциліндра;

–  $S_{Ц1}$  – площа поршня в безштоковій порожнині з діаметром  $D$ ;

–  $S_{Ц2}$  – площа поршня в штоковій порожнині з врахуванням діаметра штока  $d$ ;

–  $G_B$  – вага води з питомою вагою  $\rho_B$  в каналах підведення з об'ємом  $V_B$ ;

–  $G_{П1}$  – вага поршня;

–  $G_B$  – вага робочого органа;

–  $m_P$  – маса рухомих деталей.

Диференціальні рівняння (1 – 5), які моделюють процеси в гідроприводі занурення стовпчиків, є системою звичайних нелінійних диференціальних рівнянь, що не мають аналітичні розв'язки відносно старших похідних.

Нелінійність цих рівнянь викликається тим, що змінні  $p_1, p_2, p_3, p_4, x$  та їх похідні входять в диференціальні рівняння у вигляді підкоренових виразів. Крім того, деякі із розглянутих рівнянь містять складні залежності, які не можна лінеаризувати звичайним розкладанням в ряд Тейлора. Крім цього, у моделі є логічні функції (нерозривності потоку рідини, знак сили тертя протилежний напрямку руху тощо), що не дозволяє отримати їх аналітичний розв'язок. До числа суттєвих нелінійностей, функції яких мають розрив неперервності, відносяться залежності коефіцієнтів тертя в парах ковзання як функцій їх відносної швидкості руху.

Широкого застосування набули методи дослідження нелінійних систем на ЕОМ [14 – 16]. Сучасні програмні продукти дають широкі можливості врахування нелінійних характеристик будь-яких елементів гідроприводу, а потужності сучасних ПЕОМ достатньо для моделювання будь-яких систем, в тому числі й гідроприводів. Такі методи дослідження дозволяють оцінити стан системи в конкретній точці значень параметрів [14, 22], що не дозволяє представити результати аналізу в "згорнутому" вигляді, а це вимагає проведення додаткового аналізу з метою виділення всіх особливостей поведінки системи в динамічних режимах роботи.

Для визначення екстремальних характеристик гідроприводів сьогодні широко проводиться оптимізація за динамічними критеріями [15 – 18], яка найчастіше базується на аналізі перехідних процесів за інтегральними оцінками. При цьому відзначається [21]

складність вибору такого інтегрального критерію, який би за умови мінімуму забезпечував прийнятні параметри перехідного процесу за всіма показниками одночасно. Оптимізація за динамічними показниками не дозволяє врахувати енергетичні, вартісні та інші показники, що відіграють значну роль при виборі оптимального варіанта системи [17].

Під час розв'язання задачі параметричної оптимізації використовується низка методів, що ґрунтуються на використанні руху за градієнтом цільової функції. Методи нелінійного програмування, зокрема, метод крутого підйому (найшвидшого спуску), метод спряжених градієнтів та ін. використовують частинні похідні цільової функції, що дає змогу визначити напрямок вектора градієнта [15]. Подібні градієнтні методи використовують апроксимуючі моделі цільової функції – багатофакторне планування експерименту [20] тощо.

Методи прямого пошуку оптимуму не використовують підхід з використанням визначення напрямку градієнта. Це забезпечує їм прозорість та простоту в реалізації навіть без використання суворого математичного апарату [20].

В роботах [17, 20] детально описано застосування й визначення критеріїв математичного дослідження. Принципи застосування методів проведення оптимізації параметрів системи розглянуто авторами праці [19]. В роботі [21] наведені алгоритми і приклади програм запису та дослідження математичних моделей роботи гідроприводів, запис окремих нелінійностей, програми для розв'язання систем диференціальних рівнянь, виведення графіків перехідних функцій та ін.

Відсутність аналітичних розв'язків вимагає використання числових методів знаходження потрібних функцій. Відома низка методів числового розв'язання систем звичайних диференціальних рівнянь. Загальних недолік цих методів – громіздкість викладів та розрахунків, що схиляє нас до використання комп'ютерів для числового знаходження розв'язків.

Для вирішення звичайних диференціальних рівнянь потрібно знати значення змінної  $i$ /або її похідної при деяких значеннях незалежної змінної. Якщо ці додаткові умови задаються при одному значенні незалежної змінної, то така задача називається задачею з початковими умовами, або задачею Коші. До класу задач Коші можна віднести системи звичайних диференціальних рівнянь (1 – 5), в яких конкретним значенням незалежної змінної – часу  $t$  відповідають певні початкові значення залежних змінних  $p_1, p_2, p_3, p_4, x, y$ .

Числове розв'язання задачі Коші широко застосовується в різних галузях науки та техніки, і для нього розроблено велика кількість методів, з яких найбільш відомі: методи Ейлера, Рунге-Кутта, Рунге-Кутта-Фельберга, методи кінцевих різниць тощо.

Метод Рунге-Кутта, призначений для отримання розв'язку системи диференціальних рівнянь з заданим початковим кроком, відноситься до числових методів четвертого порядку і є стійким. Для отримання розв'язку в наступній точці він вимагає розв'язок тільки в одній попередній точці (на відміну від методу кінцевих різниць). На кожному кроці інтегрування метод Рунге-Кутта потребує обчислення правих частин рівнянь системи в чотирьох точках. Ні похибка методу, ні її оцінка не отримуються в процесі обчислень. Тому контроль точності і вибір кроку інтегрування проводяться шляхом порівняння результатів розрахунків в одній і тій самій точці, які отримані з цілим та подвійним кроком.

На відміну від методу Рунге-Кутта, метод Рунге-Кутта-Фельберга автоматично змінює крок інтегрування при виявленні похибки обчислень, через це він є дещо більш громіздким, але набагато точнішим.

### Висновки

1. Модель процесів занурення шпалерних стовпчиків за допомогою гідравлічного приводу дозволяє визначати їх параметри.
2. Порівняння чисельних методів розв'язання диференціальних рівнянь (1 – 5) дозволяє зробити висновок про доцільність застосування методу Рунге-Кутта-Фельберга.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Сидоренко В. П., Яхно О. М. Гідравліка і гідропривод. Київ : Університет "Україна", 2007. 163 с.
- Наукові праці ВНТУ, 2026, №1

2. Підвищення продуктивності процесу занурення паль в садках та виноградниках шляхом застосування гідроструменевої технології / Н. Р. Веселовська та ін. *Техніка, енергетика, транспорт в АПК*. 2023. №1. С. 64–75.
3. Шевченко В. В., Іскович-Лотоцький Р. Д. Гідроструменева технологія занурення паль в садках та виноградниках. *Матеріали конференції «Молодь в науці: дослідження, проблеми, перспективи (МН-2023)»*, Вінниця, 2022 р. URL: <https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/mn/mn2023/paper/viewFile/16838/14033>.
4. Білецький В. С. *Механіка ґрунтів у будівництві*. К.: Вища школа, 2010. 384 с.
5. Климчук В. В., Плахотнік В. М. *Машини та обладнання для садівництва та виноградарства*. К.: Аграрна освіта, 2016. 290 с.
6. Гриценко В. І., Гунько О. М. *Сучасні технології встановлення опор у садівництві*. Харків: Агропромвидав, 2020. 148 с.
7. Коломієць С. С. *Інженерні основи механізації сільськогосподарських робіт*. К.: Університетське видавництво, 2018. 265 с.
8. Романов С. В., Козаченко М. М. Ефективність технології вдавлювання паль у різних ґрунтових умовах. *Будівельне виробництво*. 2021. Т. 72. С. 55–60.
9. Лютенко В. Є., Оданець Б. Р. Дослідження процесу заглиблення паль методом вдавлювання. *Вісник Харківського нац. техн. ун-ту сільського господарства ім. П. Василенка*. Х. : ХНТУСГ, 2019. Вип. 205: Проблеми надійності машин. С. 350–360.
10. Березюк О. В. Шляхи підвищення ефективності збирання та транспортування твердих побутових відходів. *Сучасні технології, матеріали і конструкції у будівництві: Збірник наукових праць*. Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2004. С. 117–121.
11. Буренніков Ю. А., Неміровський І. А., Козлов Л. Г. *Гідравліка, гідро- та пневмоприводи: навчальний посібник*. МОНМС України, ВНТУ. Вінниця: ВНТУ, 2013. 273 с.
12. Савуляк В. І., Березюк О. В. Дослідження динаміки приводу плити для пресування твердих побутових відходів. *Вісник ВПІ*. 2002. №4 С. 83–86.
13. Кравченко О., Куба Т., Нечипор О. Сучасні підходи до гідравлічного моделювання систем. *Проблеми водопостачання, водовідведення та гідравліки*. 2025. №50. С. 49–60.
14. Березюк О., Савуляк В., Харжевський В. Регресійний аналіз впливу твердості поверхні шнека на його знос під час зневоднення твердих відходів у сміттєвози. *Проблеми трибології*. 2021. №26 (3/101). С. 48–55. URL: <https://doi.org/10.31891/2079-1372-2021-101-3-48-55>.
15. Chatterjee S., Hadi A. S. *Regression analysis by example*. John Wiley & Sons, 2015. URL: <https://sadbhavnapublications.org/research-enrichment-material/2-Statistical-Books/Regression-Analysis-by-Example.pdf>.
16. Dindorf R., Takosoglu J., Wos P. *Advances in Fluid Power Systems*. Basel: MDPI, 2022. 262 p.
17. Stryczek J., Warzyńska U. *Advances in Hydraulic and Pneumatic Drives and Control*. Cham: Springer, 2023. 328 p.
18. Stosiak M., Karpenko M. *Dynamics of Machines and Hydraulic Systems: Mechanical Vibrations and Pressure Pulsations*. Cham: Springer, 2024. 179 p.
19. Jelali M., Kroll A. *Hydraulic Servo-Systems: Modelling, Identification and Control*. London: Springer, 2003. 431 p.
20. Watton J. *Fundamentals of Fluid Power Control*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. 504 p.
21. Mishchuk D. Development of the Mathematical Model of a Hydraulic Drive. *Transfer of Innovative Technologies*. 2018. Vol 1, №2 (2018). URL: <http://tit.knuba.edu.ua/article/view/153476>.

Стаття надійшла до редакції 10.03.2026.

Стаття пройшла рецензування 20.03.2026.

**Савуляк Валерій Іванович** – д-р техн. наук, професор, професор кафедри галузевого машинобудування, <https://orcid.org/0000-0002-4278-5155>, e-mail: [korsav84@gmail.com](mailto:korsav84@gmail.com).

**Шевченко Василь Васильович** – аспірант кафедри галузевого машинобудування, <https://orcid.org/0009-0009-7534-4928>, e-mail: [aspirant.shevchenko@gmail.com](mailto:aspirant.shevchenko@gmail.com).

Вінницький національний технічний університет.