

УДК 655.226

М. М. Луцків, д-р, техн., наук, проф.; О. П. Заремба

МОДЕЛЮВАННЯ РАСТРУВАННЯ ЕЛІПСОЇДАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ЦИФРОВИХ ЗОБРАЖЕНЬ

Розроблено математичну модель растрівання еліпсоїдального перетворення цифрових зображень світлих тонів. Для дослідження сформовано три типові варіанти еліпсоїдального перетворення, у яких кількість рівнів сірого змінюється в межах $[0 \leq L \leq 255]$. Це дало змогу проаналізувати зміну градаційних характеристик, особливості їх форми та вплив на якість растрового перетворення зображень у процесі підготовки до друкування.

Представлено результати моделювання градаційних характеристик еліпсоїдального перетворення, які мають форму випуклих кривих із меншою крутизною на початку діапазону в темних тонах. Така форма сприяє зменшенню ймовірності виникнення постеризації, що проявляється за недостатньої кількості рівнів градації та призводить до втрати дрібних деталей у затемнених ділянках зображення. Визначено, що різниця характеристик растрового перетворення $E_i = S_i - S_0$ має форму дзвоноподібних кривих, які зміщені у сторону темних тонів. За значення $L_0 \approx 75$ рівнів максимальні значення складали $E_{i, \max}$: 0,148; 0,276; 0,414 відносних одиниць, після чого характеристики ставали більш пологими та наближалися до нульових значень. Аналіз оптичної густини показав, що початкові значення відповідають відносній площі растрових елементів $S = 1$ і становлять 2,406 одиниць. Надалі спостерігається різке зменшення значень густини, яке з подальшим зростанням рівнів сірого поступово уповільнюється і прямує до нуля. Отримані результати підтверджують, що запропоноване еліпсоїдальне перетворення забезпечує точніше відтворення тонових переходів у темних ділянках та може бути корисним для збереження деталізації.

Результати дослідження та імітаційного моделювання можуть бути застосовані під час підготовки цифрових зображень до растрівання і друкування, а також для подальшого аналізу градаційних і растрових характеристик у поліграфічних процесах.

Ключові слова: моделювання, цифрове зображення, растрівання, симулятор, градаційні характеристики, оптична густина, друкування, якість.

Постановка проблеми. Під час приготування зображень для друкування, скановані пакетом зображення майже завжди потребують коригування, включаючи коригування тону. Найвні методи цифрової обробки зображень дають змогу різними перетвореннями покращити якість зображень [1, 3, 4, 5]. У комп'ютерних видавничих системах, для підготовки зображень до друкування, застосовують графічні редактори Photoshop та інші, що базуються на ступеневому гама перетворенні. Основним видом обробки і коригування тону, є інструмент Curves

(криві). Якщо дизайнер (технолог, оператор) зсуваннями або мишкою у вікні монітора розтягує криву вгору, то зображення розсвітлюється, а як стискує криву вниз, то зображення затемнюється. У більшості випадків дизайнер опрацьовує зображення і оцінює його на моніторі на графічному тлі за відсутності оригіналу, тому якість обробленого зображення залежить від майстерності, уміння і знання, тому не може бути оптимальним [1, 5, 8, 10].

Під час приготування цифрових зображень до друкування найчастіше застосовують обробку в просторовій області за допомогою степеневого гама-перетворення, що зручно і швидко, але має обмеження щодо корекції тіней і світлів (ризик постеризації) [5, 10]. У більшості графічних редакторів побудова цільової градаційної характеристики зображення не виконується автоматично, а параметри (зокрема показник степеня) підбираються емпірично. Це обмежує відтворюваність результатів і пояснює інтерес до форм перетворень із меншою початковою крутизною, орієнтованих на збереження деталей у темних тонах [1, 5, 10].

Аналіз останніх досліджень та публікацій. У різних галузях науки і техніки застосовують різні методи цифрової обробки зображень залежно від мети та призначення [1, 2, 10]. Для поліграфічної підготовки зображень досі широко використовують просторові перетворення, зокрема степеневе гама-перетворення [5, 10]. З погляду метрології кольору та узгодженості вимірювань орієнтуємось на чинні рекомендації СІЕ – чинний стандарт колориметрії [3]. Водночас актуальні навчальні та прикладні джерела з поліграфічних технологій [4, 6, 7, 9] відзначають інтерес до форм перетворень і алгоритмів растрівання, що мінімізують втрати деталізації у тінях. Під час підготовки цифрових зображень до друкування популярним інструментом є степеневе гама-перетворення [5, 8, 10]

$$L_{вих} = c L^{\nu}_{вх}, \quad (1)$$

де $L_{вх}$ – яскравість вихідного зображення, $L_{вих}$ – яскравість вихідного скорегованого зображення, ν – показник степені, c – коефіцієнт масштабу.

Поряд із цим, у сучасній практиці активно розвиваються стохастичні та частотно-адаптивні методи растрівання [11, 12]. Вони дають змогу зменшити регулярні артефакти та адаптувати розташування точок до просторових частот зображення, але вимагають більших обчислювальних ресурсів та спеціалізованого програмного забезпечення. Додатково, у новітніх роботах демонструється гібридизація підходів [13] та нейронні методи з керуванням розміщенням точок на рівні «dot-level» [14], а також поліпшення стабільності кластеризованих стохастичних растрових структур [15]

Його перевагою є доступність і швидкість, однак воно має суттєві обмеження: корекція тіней і світлів є недостатньо гнучкою, часто виникає

постеризація, а вибір показника степеня та граничних рівнів чорного і білого здійснюється емпірично без строгого обґрунтування. Логарифмічні перетворення [1] дещо покращують відтворення у світлих ділянках, але у темних зонах залишаються втрати деталізації. Подібні підходи просторової обробки [2, 9] не враховують інверсності растрової характеристики до градаційної, тому їх практична ефективність у друкарських процесах обмежена.

Якщо показник степені ν менше одиниці, то скориговане вихідне зображення стає світлим, натомість за показника більше одиниці – темнішим. Основним недоліком степеневого гама перетворення, є обмеження щодо коригування тіней і світлів, що викликає постеризацію зображення, що є його недоліком [5, 8, 9]. В доступних джерелах відсутні обґрунтовані дані щодо вибору показника степені і граничних рівнів чорного і білого, які спотворюють зображення.

У працях [2, 3, 9, 10], наведені загальні відомості про технологію растрування, растрову передачу і характеристику растрового перетворення, яку описують виразом:

$$S = F(L_{\text{ex}}), \quad (2)$$

в якому S – відносна площа растрових елементів.

Визначення значень відносної площі друкованих елементів на відбитку на основу оптичної густини плашки покритою фарбою описується формулою [5, 9, 7]:

$$S = \frac{1 - 10^{-D_r/n}}{1 - 10^{-D_\phi/n}}, \quad (3)$$

де D_r – растрова оптична густина, D_ϕ – оптична густина суцільного фарбового шару (плашки), коефіцієнт n , залежить від типу паперу і знаходиться в межах [1,5 – 2,5], однак, ці формули є наближені.

Для оцінки якості друкованих відбитків, визначають відносний контраст друку за коефіцієнтом Ширмера [3, 6, 9]:

$$K = \frac{D_\phi - D_{0,8}}{D_\phi}, \quad (4)$$

де D_ϕ – оптична густина плашки покритої фарбою, $D_{0,8}$ – растрова (інтегральна) густина растрової ділянки контрольної шкали із відсноною площею $S = 0,8$.

Коефіцієнт контрасту залежить від паперу і знаходиться в межах [0,25 – 0,47]. Сучасні денситометри вимірюють коефіцієнт контрасту автоматично.

Новітні дослідження у сфері цифрового друку підтверджують значний потенціал поєднання традиційних і стохастичних методів. Так, роботи, присвячені гібридним алгоритмам [13], демонструють, що комбіновані підходи дозволяють суттєво знизити небажані смугасті візерунки. Розвиток моделей адаптивного управління розподілом растрових точок

[14] забезпечує гнучке налаштування під різні характеристики друкарських систем. Крім того, впровадження сучасних стохастичних кластерних алгоритмів [15] сприяє досягненню високої стабільності кольоровідтворення та покращенню деталізації у темних ділянках зображень.

Запропоноване у цій статті еліпсоїдальне перетворення відрізняється тим, що на початку діапазону має меншу крутизну кривих, що зменшує ймовірність постеризації у темних тонах і дозволяє краще передати деталі. Крім того, воно кількісно описує різниці між лінійним та еліпсоїдальним перетворенням через показники E_i , а також поєднує моделювання градаційних характеристик і оптичної густини. Це дає змогу точніше прогнозувати якість друкованого відбитка і усуває недоліки традиційних методів.

На основі викладеного, робимо висновок, що у доступних джерелах недостатньо інформації про растрування цифрових зображень. Отже, у дизайнера недостатньо даних щодо підготовки цифрових зображень до друкування, що обмежує його можливість щодо якісної підготовки зображень.

Мета статті – підвищення якості відтворення тонових переходів у поліграфічному процесі при збереженні деталізації тіней і забезпеченні якісної підготовки за рахунок розробки математичної моделі растрування еліпсоїдального перетворення зображень.

Наукова новизна роботи полягає у введенні еліпсоїдального перетворення з меншою крутизною градаційних кривих, що усуває постеризацію в темних тонах і дозволяє чіткіше відтворювати дрібні деталі. Запропоновано кількісну оцінку відмінностей від лінійного перетворення через показники E_i , що раніше не застосовувалося.

Розвитком наявних ідей є використання відомих методів моделювання градаційних характеристик та оптичної густини у поєднанні з новою формою перетворення, а також побудова симулятора у середовищі MATLAB: Simulink для практичної реалізації.

Виклад основного матеріалу дослідження. Для розроблення моделювання растрування еліпсоїдального перетворення приймаємо, що цифрове зображення подано аналоговою неперервною функцією, описується виразом [5, 10]

$$L = F(L_0), \text{ якщо } [0 \leq L \leq 255], \quad (5)$$

де L_0 – лінійна шкала, яка змінюється в межах $[0...255]$, L – яскравість вихідного зображення, яка містить 256 рівнів сірого, $F(L_0)$ – задана функція перетворення.

Розширення інформаційних можливостей растрування зображень, можна реалізувати на основі рівняння еліпса, яке описується виразом:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (6)$$

де a і b – задані геометричні розміри еліпса.

Із виразу визначимо:

$$y = b \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{0,5}. \quad (7)$$

Замінивши змінні x , y на яскравість вхідного і вихідного зображень L_0 , L і змістивши його праворуч на $K L_0$ та обтявши від'ємну частину, одержимо еліпсоїдальне перетворення цифрових зображень, яке менш критичне до темних тонів:

$$L = [((1 - L_0)^2)^{0,5} + K L_0] 255M, \text{ якщо } 0 \leq L \leq 255, \quad (8)$$

де L_0 – лінійна шкала [$0 \leq L_0 \leq 255$], K – коефіцієнт, який формує градаційну характеристику перетворення, M – масштаб до настроювання L до рівня 255.

Задаючи різні значення K за виразом (8), можна сформувані різні варіанти градаційних характеристик перетворення для світлих тонів:

$$L_1 = [((1 - (1 - L_0)^2)^{0,5})] 255M_1, \text{ якщо } 0 \leq L \leq 255, \quad (9)$$

$$L_2 = [((1 - (1 - L_0)^2)^{0,5}) + 0,5L_0] 255M_2, \text{ якщо } 0 \leq L \leq 255, \quad (10)$$

$$L_3 = [((1 - (1 - L_0)^2)^{0,5}) + 1,8L_0] 255M_3, \text{ якщо } 0 \leq L \leq 255, \quad (11)$$

де M_i – масштаби, які забезпечують задані межі [$0 \leq L_0 \leq 255$].

Растрове перетворення здійснено на основі відомого виразу [5, 10]

$$S_i = 1 - L_i/255, \quad (12)$$

де S_i – відносна площа растрових елементів, яка є інверсна до кількості рівнів сірого L .

Для оцінки впливу форм характеристик типових варіантів растрового перетворення, визначили їх різниці відмінного перетворення:

$$E_i = S_i - S_0, \quad (13)$$

де S_i – характеристики растрування для типових варіантів перетворення, S_0 – лінійна характеристика.

Щоб кількісно оцінити растрування, здійснили демодуляцію растрування еліпсоїдального перетворення цифрових зображень (11), яка ґрунтується на основі відомого виразу оптичної густини [5, 10]:

$$D = \log_{10} [255/(1 - S) \times 255 + 1], \quad (14)$$

де D – інтегральна (растрова) оптична густина растрованого цифрового зображення.

На основі викладеного і виразів (9) – (14), можна розрахувати і побудувати градаційні характеристики еліпсоїдального перетворення, характеристики растрування оптичної густини. Для спрощення поставлених завдань, застосовано об'єктно-орієнтовані програмування в пакеті MATLAB: Simulink.

На основі викладеного розроблено структурну схему моделі симулятора растрування еліпсоїдального перетворення світлих тонів

(рис. 1). Схема відображає послідовність обчислення градаційних характеристик, відносної площі растрових елементів, різниць між ними та інтегральної оптичної густини. Використання Simulink дозволяє реалізувати процес у вигляді взаємопов'язаних блоків, що дає можливість наочно простежити вплив параметрів перетворення на результати моделювання і спростити відлагодження алгоритму.

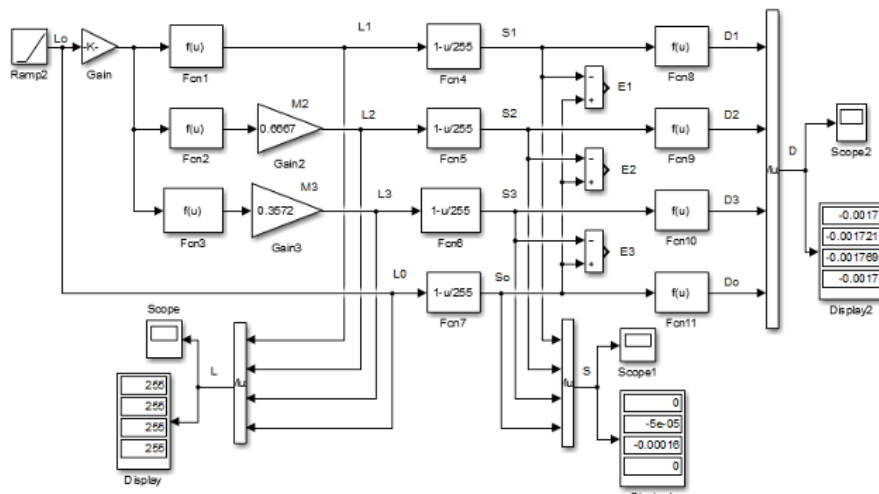


Рис. 1. Структурна схема моделі растровання еліпсоїдального перетворення

Симулятор є трьох каналний і послідовно розраховує типові градаційні характеристики L еліпсоїдального перетворення, відносну площу S растрового перетворення, їх різниці E і растрову оптичну густину D . Блок Ramp генерує лінійну шкалу L_0 , яка масштабується блоком Gain ($1/255$) і паралельно подається на входи функціональних блоків математичних функцій першого стовпця Fcn1-Fcn3 у діалогових вікнах яких записана програма (вирази (9) – (11)), для обчислення градаційних характеристик, які масштабуються, подаються на входи блоків математичних функцій другого стовпця Fcn4 – Fcn7 у яких записана програма (вираз (12)), для обчислення відносних площ S , які подаються на входи функціональних блоків математичних функцій третього стовпця Fcn8 – Fcn9 у діалогових вікнах яких, записані програми (вираз (14)), для обчислення оптичної густини D . Для візуалізації результатів обчислень застосовуються блоки мультиплексорів і блоки Scope і Display. Для визначення різниць типових варіантів відносних площ (13) додатково введено блоки віднімання ADD на виході яких одержуються різниці E_i , які додатково візуалізуються.

В інтерактивному режимі роботи симулятора, визначити масштаби до настроювання $M1 = 1$; $M2 = 0,6667$; $M3 = 0,3572$. Результати імітаційного моделювання градаційних характеристик типових варіантів еліпсоїдального перетворення для світлих тонів зображення наведені на рис. 2.

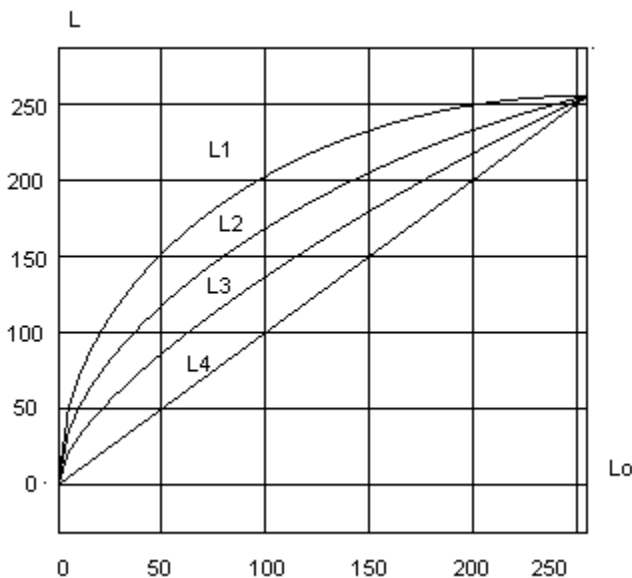


Рис. 2. Градаційні характеристики еліпсоїдального перетворення

До порівняння, внизу подана лінійна шкала L_0 . Градаційні характеристики є випуклими кривими, початкові значення яких рівні нулю і відповідають темним тонам, натомість кінцеві значення дорівнюють 255 рівнів сірого і відповідають світлим тонам. Збільшення коефіцієнта у виразі (8), розтягує градаційні криві і розсвітлює тон зображення. Зауважено, що на початку діапазону тонопередачі за $L_0 = 75$, градаційні характеристики мають значення 180; 145; 112; 75, рівні сірого тону. На початку діапазону, крутизна кривих є значно меншою, ніж крутизна степеневого гама перетворення, тому у тінях не виникає постеризація і добре розрізняються дрібні деталі темних ділянок зображення, що є перевагою еліпсоїдального перетворення. У кінці діапазону тонопередачі крутизна кривих значно зменшується, тому є втрати у світах.

Результати моделювання растрового перетворення еліпсоїдального перетворення для типових варіантів цифрових зображень, наведені на рис. 3.

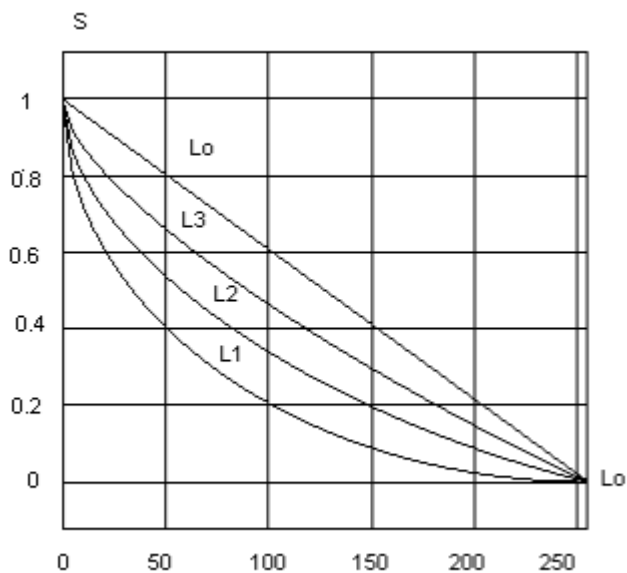


Рис. 3. Графіки растровання типових варіантів еліпсоїдального перетворення

Для порівняння зверху наведена характеристика лінійного перетворення. Графіки растровання є вгнутими кривими і на початку діапазону мають велику крутизну, а значення їх площі за $L_0 \geq 75$ рівнях, становить: 0,7059; 0,5579; 0,4297 і 0,2917 одиниць. Отже, швидше зменшуються, після чого більш плавно прямують до кінцевих нульових значень. Порівнюючи рис. 3 і рис. 2, робимо висновок, що характеристики растровання є інверсні до градаційних характеристик, тому є носієм інформації про такі зображення.

Результати перетворення різниць відхилення характеристик типових варіантів растрового перетворення, наведені на рис. 4.

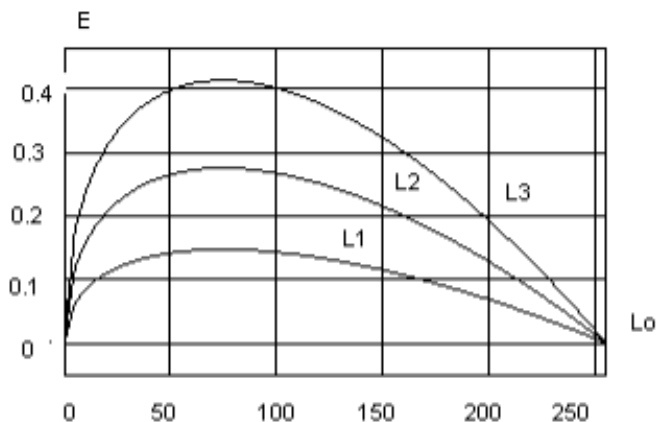


Рис. 4. Графіки різниць відхилення характеристик растрового перетворення

На початку діапазону тонопередачі графіки різниць відхилення швидко збільшуються і за $L = 70$ рівнів, досягають максимальних значень $EM = 0,4142; 0,2762; 0,148$, після цього графіки стають випуклими кривими і поступово прямують до кінцевих нульових значень. Отже, графіки різниць кількісно і якісно оцінюють вплив форм типових варіантів еліпсоїдального перетворення зображень та растрівання.

Результати моделювання демодуляції растрового перетворення і визначення інтегральної оптичної густини зображень, наведені на рис. 5.

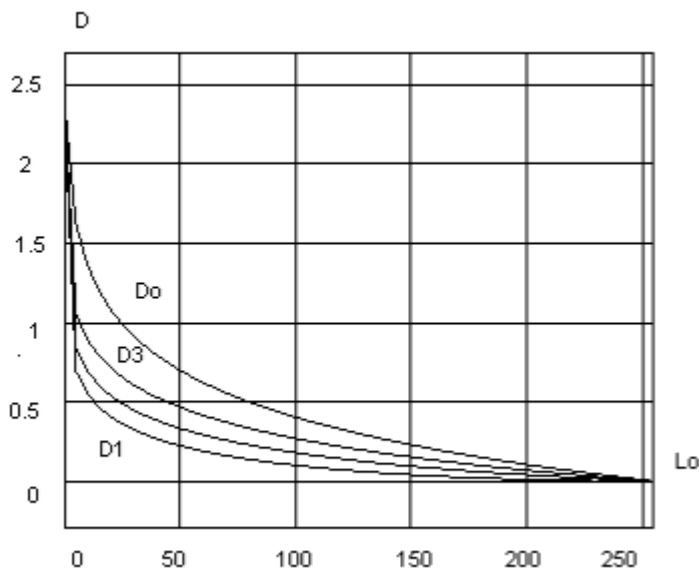


Рис. 5. Графіки інтегральної оптичної густини зображень

Оптична густина визначається на основі логарифмічного виразу (14) і відповідає сприйняттю тону зображення зоровою системою людини, тому має свої особливості. Початкові значення оптичної густини близькі до $D = 2,40$ одиниць і досить швидко зменшуються і за $L_0 = 5$ рівнів сірого, становить: $0,6969; 0,8488; 1,061; 1,678$ одиниць. Найбільшу оптичну частину має лінійна шкала D_0 . Якщо кількість рівнів сірого збільшується удвічі ($L_0 = 10$), то оптична густина зменшується і становить: $0,551; 0,6949; 0,8922; 1,365$ одиниць і досить плавно прямує до кінцевих нульових значень.

Із наведених досліджень та імітаційного моделювання робимо висновок, що запропоноване еліпсоїдальне перетворення для світлих тонів має малу рогадку крутизну градаційних характеристик, яка значно менша кривизни степеневого гама перетворення, тому не виникає постеризація на темних ділянках зображення і забезпечує сприйняття деталей на темних ділянках, добре відтворює растрові зображення на середніх тонах, натомість є втрати у світах.

Висновки. У статті розроблено математичну модель растрівання еліпсоїдального перетворення цифрових зображень.

У цій роботі дослідження свідомо обмежено світлими ділянками зображення, оскільки саме вони найбільш критичні при виникненні постеризації та втрат деталей у поліграфічному відтворенні. Такий підхід дозволяє сфокусуватися на ключовій проблемі й отримати кількісні характеристики, які можуть бути використані для подальшого розширення методу.

Наукова новизна полягає у застосуванні еліпсоїдального перетворення для формування градаційних характеристик із меншою крутизною, ніж у ступеневого гама-перетворення, що дозволяє уникнути постеризації та забезпечує кращу передачу деталей у темних ділянках. Також новим є використання показників E_i для кількісної оцінки різниць між типами перетворень.

Розвитком наявних підходів є використання традиційних методів аналізу оптичної густини та побудова структурної схеми симулятора в MATLAB: Simulink, що дозволяє поєднати відомі принципи з новою формою перетворення для підвищення якості підготовки зображень до друку.

За результатами досліджень та імітаційного моделювання встановлено, що градаційні характеристики еліптичного перетворення є випуклими кривими, які мають меншу крутизну, ніж крутизна ступеневого перетворення, що усуває постеризацію зображення. Характеристики растрівання є інверсними до градаційних характеристик, є вигнутими кривими і на початку діапазону мають велику крутизну, а значення їх площ при $L_0 = 75$ рівнях становить S : 0,2117; 0,4297; 0,5579; 0,7054 відносних одиниць, які швидко зменшуються, після чого більш плавно прямують до кінцевих нульових значень. Графіки різниць відхилення характеристик типових варіантів растрового перетворення на початку діапазону швидко збільшуються і за $L_0 = 70$ рівнів досягають максимальних значень E_m : 0,4142; 0,2762; 0,148 відносних одиниць, швидко зменшуються, є випуклими кривими і прямують до нульових кінцевих значень. Встановлено, що початкові значення растрової оптичної густини зображень близькі до $D = 2,40$ одиниць і швидко змінюються і за $L_0 = 5$ рівнів сірого становлять: 0,6969; 0,8488; 1,061; 1,628 одиниць. Найбільшу оптичну густину має лінійна шкала D_0 . Якщо кількість рівнів сірого збільшується удвічі ($L_0 = 10$), то оптична густина зменшується і становить: 0,551; 0,6949; 0,8922; 1,365 одиниць і досить плавно прямує до кінцевих нульових значень. Оптична густина визначається на основі логарифмічного виразу, має свої особливості і відповідає сприйняттю тону зображення зоровою системою людини.

Результати приведених досліджень, у тому числі типові варіанти градаційних характеристик і графіки растрового перетворення

еліпсоїдального перетворення рекомендуються для формування градаційних характеристик і характеристик растрування під час приготування зображень до друкування.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кобилін О. А., Творошенко І. С. Методи цифрової обробки зображень: навчальний посібник. Харків: ХНУРЕ, 2021. 123 с.
2. Відтворення зображень растровими скануючи ми пристроями: навчальний посібник / Гавриш Б. Н., Дурняк Б. В., Тимченко О. В., Ющик О. В. Львів: Видавництво УАД, 2016, 180 с.
3. International Commission on Illumination (CIE). Colorimetry, 4th ed. CIE 015:2018. Vienna: CIE, 2018. 111 p.
4. Гордєєв А. С. Технології поліграфічного виробництва: методичні рекомендації до практичних робіт. Харків: ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2023. 88 с.
5. Перелигін Б. В. Цифрова обробка зображень: конспект лекцій. Одеса: ОДЕКУ, 2023. 186 с.
6. Палюх О. О. Технології поліграфічного виробництва. Частина 2. Післядрукарські процеси. Курс лекцій. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. 248 с.
7. Методи й засоби інтелектуальної обробки сигналів: обробка цифрових зображень: навч. посібник / Ушенко Ю. О., Дерев'янчук О. В., Талах М. В., Дворжак В. В. Чернівці: ЧНУ ім. Ю. Федьковича, 2024. 175 с.
8. Nixon M., Aguado A. Feature Extraction and Image Processing for Computer Vision. Cambridge: Academic Press, 2020. 650 p.
9. Advanced Graphic Communication, Printing and Packaging Technology / Zhao P., Ye Z., Xu M., Yang L. Singapore: Springer, 2020. 883 p.
10. Gonzalez R. C., Woods R. E. Digital Image Processing (Global Edition). Harlow: Pearson, 2018. 1024 p.
11. Kim H., Lee S., Structure-Aware Halftoning Using the Iterative Method Controlling the Dot Placement (IMCDP). *Journal of Imaging Science and Technology*. 2021. №65 (6). P. 1-10.
12. Liu X., Pan Q., Xia G. Multi-mode Halftoning Using Stochastic Clustered-Dot Screen. In: Intelligent Computing Theories and Application (ICIC 2018). LNCS 10955. Cham: Springer, 2018. P. 423-431.
13. Gooran S. Hybrid Halftoning in Flexography. *TAGA Proceedings*. 2017. P. 1-17.
14. Jiang H., Zhou B., Mu Y. Ink Dot-Oriented Differentiable Optimization for Neural Image Halftoning. In: CVPR 2024. IEEE/CVF, 2024. 10 p.
15. Ostromoukhov V., Donohue C., Jeschke S. New Results for Aperiodic, Clustered-Dot Halftoning. In: Imaging (IS&T International Symposium), 2019. P. 84-88.

Стаття надійшла до редакції 03.01.2026.

Стаття пройшла рецензування 20.03.2026.

Стаття опублікована 31.03.2026.

Луцків Микола Михайлович – д-р, техн. наук, професор кафедри комп'ютерних технологій в видавничо-поліграфічних процесах, ORCID: 0009-0002-8312-211X.
Заремба Олег Петрович – аспірант кафедри комп'ютерних технологій в видавничо-поліграфічних процесах, ORCID: 0009-0006-1525-3862, e-mail: oleh.p.zaremba@lpnu.ua.

Національний університет «Львівська політехніка».