УДК 62.50:658.21

І. С. Колесник, к. т. н., Р. Л. Іванов; П. В. Северілов

КОМПЛЕКС РОБОЧИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ Й ОПТИМІЗАЦІЇ КРЕДИТНИХ СТРАТЕГІЙ

Поставлена і вирішена задача моделювання оптимальних процесів розвитку виробничих систем з урахуванням використання кредитів. Отримані оптимальні стратегії кредитування й повернення кредитів. Отримані функції попиту для випадку оптимального управління розвитком.

Ключові слова: *розподілена система, оптимальний розвиток, виробник, попит, кредити, оптимальна кредитна стратегія розвитку, робоча модель.*

Постановка проблеми. Ефективність процесів кредитування – умова виживання й успішного розвитку як для позичальників, так і кредиторів – банків. Розглядаємо тільки кредити на розвиток виробництв *з позицій позичальника-виробника*. У такому випадку задача визначення темпу кредитування та розподілу кредитів між напрямками розвитку підприємства або між продуктами, що випускає і планує випускати підприємство, є задачею оптимального управління нелінійною динамічною системою за рахунок власних і зовнішніх ресурсів. Фінансово-юридичні аспекти є лише транзакційними витратами на реалізацію процесу кредитування. Оптимальність процесу кредитування сьогодні – умова виживання не тільки окремого виробника, але й галузевої чи національної економіки.

Невирішені частини проблеми. У доступній літературі відсутні математичні моделі для визначення оптимальних стратегій кредитування, повернення кредитів і розрахунку ризиків. Перша причина "вакууму" публікацій – конфіденційність корпоративної науки, друга – "нічия територія" та відсутність спеціалістів із системного аналізу й управління та програмування. У доступній літературі з управління проектами є тільки словесні рецепти та неадекватні моделі. Причини в тому, що маємо справу зі складною варіаційною задачею, розв'язання якої потребує комплексного підходу "програмування + теорія оптимального управління + економіка". Побічна проблема – несумісність стандартів публікацій зі стандартами математичних пакетів і пакетів для моделювання. Сьогодні публікація, де формули набрані в текстовому редакторі, звичайно, не містить нових результатів.

Цілі розробки – створення методів і програмних засобів для оптимізації й моделювання достатньо широкого класу задач оптимального управління розвитком виробничих систем.

Компоненти моделі розвитку з використанням зовнішніх ресурсів

1. Метод оптимального агрегування. Згадаємо постановки задач нелінійного програмування.

Пряма задача – максимізація сумарного виробництва при обмеженні ресурсів. Розглядається система з N елементів, які використовують деякий ресурс у кількості x_i і виробляють продукцію в кількостях: $y_i = fi(x_i)$; $i = 1,\ldots,N$, де x_i – кількість ресурсу, виділеного i-му елементу. Потрібно розподілити ресурс R так, щоб максимізувати сумарне виробництво:

$$F(x_1, x_2,.., x_N) = \sum_{i=1}^{N} fi(x_i); \text{ за умови } Fs(x_1, x_2,.., x_N) = \sum_{i=1}^{N} fi(x_i) - Ys = 0\,.$$

Спряжена задача – мінімізація сумарних витрат при обмеженні рівня сумарного виробництва. Розглядається та ж система з N виробничих елементів. Потрібно розподілити навантаження Ys так, щоб мінімізувати сумарні витрати:

$Gs(x_1, x_2,.., x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i$; за умови $Fs\left(x_1, x_2, .., x_N\right) = \sum_{i=1}^{N} fi\left(x_i\right) - Ys = 0$.

Управління $-x_i$ або $y_i = fi(x_i)$.

Методи рішення. Суть відомих методів нелінійного програмування – знаходження екстремуму функції N змінних при обмеженнях, або "задача вибору точки в N – вимірному фазовому просторі" за термінологією Беллмана [1]. Метод оптимального агрегування замінює задачу знаходження екстремуму функції багатьох змінних послідовністю задач знаходження екстремуму функції однієї змінної.

Перший крок у методі оптимального агрегування – розширення задачі.

Вводимо вектор-функцію оптимального розподілу ресурсу $Dop(R)$, $0 \le R \le R\max$, де $R\max$ – максимальне значення обмеження. Компоненти цієї вектор-функції задають оптимальний за критерієм сумарного виробництва розподіл ресурсу.

Введемо оптимальну виробничу функцію системи $Yop(R) = \sum_{i=1}^{N} fi\left(Dop(R)_i\right)$.

Функція $Yop(R)$ для кожного значення обмеження по ресурсу R задає максимальну ефективність перетворення ресурсу в продукт.

Формулюємо розширену оптимізаційну задачу: задано N виробничих функцій, адитивне обмеження по ресурсу й адитивний критерій – сумарне виробництво; потрібно знайти оптимальну виробничу функцію системи $Yop(R)$ і вектор-функцію оптимального розподілу ресурсу $Dop(R)$.

Другий крок – перехід до безрозмірних змінних управління. Замість змінних управління $x_1, x_2, \ldots, x_N$ вводимо безрозмірні змінні $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$; де $\alpha_1 = x_1 \div R$; $\alpha_2 = x_2 \div R$. Змістовно ці змінні – частки ресурсу для відповідних елементів, сума цих часток дорівнює одиниці. Така формальна заміна дозволяє довести, що оптимальна виробнича функція (ФВ) буде такою, що огинає множину певних виробничих функцій елементів системи. Саме на цьому базується обґрунтування методу оптимального агрегування. Введемо множину α-функцій:

$$f\alpha(f1, f2, \alpha, x) := f1(\alpha \cdot x) + f2[(1-\alpha) \cdot x].$$

Оптимальна ФВ системи з двох елементів буде такою, що огинає множини $f\alpha(f1, f2, \alpha, x)$, $0 \le \alpha \le 1$, тобто результатом застосування операції $\max(\cdot)$*,* яка є *асоціативною і комутативною*. Для системи з адитивним критерієм оптимальна ФВ $FopN(f1, f2, \ldots, fN)$ має місце властивість:

$$Fop3(f1, f2, f3) := Fop2(f1, Fop2(f2, f3)).$$

Програмні засоби дозволяють реалізувати *бінарний оператор оптимального агрегування* $f2o(f1, f2)$**,** який бере пару функцій *f1, f2* і повертає оптимальну виробничу функцію та відповідну вектор-функцію оптимального розподілу ресурсу. Обсяг обчислень за цим методом *зростає тільки лінійно, а не експоненційно. Метод не має обмежень за формою ФВ*, тому що максимум функції однієї змінної знаходиться методом прямого перебору. Метод фактично замінює задачу пошуку екстремуму алгебраїчною задачею. *Оператор оптимального агрегування породжує алгебру* з однією асоціативною й комутативною операцією, елементи якої – масиви змінної розмірності.

2. Метод рішення варіаційної задачі оптимального розвитку. Р. Беллман досліджував структуру рішень для варіаційних задач розподілу й знайшов рішення для окремого випадку – задачі Марковіца. Суть задачі розвитку – оптимальний розподіл наявних ресурсів між накопиченням і розвитком – створенням "виробничих потужностей". Ця базова задача була модифікована за такими компонентами:

– використання методу принципу максимуму, а не методу динамічного програмування;

– знаходження максимуму функції Гамільтона методом прямого перебору;

– використання методу оптимального агрегування для заміни багатовимірного об’єкту еквівалентним оптимальним одновимірним об’єктом.

Стисло розглянемо рішення одновимірної задачі розвитку методом принципу максимуму.

Об’єкт управління: $\frac{d}{dt}x(t)=fin(y(t))$, де *x(t)* – темп випуску, *y(t)* – темп інвестицій, $y(t)=x(t)\cdot u(t), 0\le u(t)\le 1$ – нормоване управління, *fin(y(t))* – функція віддачі інвестицій – нестрого монотонно зростаюча функція.

Граничні умови $x(0)=x0$ – стартовий темп виробництва, *Tp* – плановий період.

Критерій $J1=\int_0^T x(t)\cdot(1-u(t))dt$ – "накопичений дохід", *мета оптимізації* $\min\limits_{ut}(J)$ – управління, що дає максимум критерію, – накопиченого за плановий період доходу.

Точне рішення задачі. Записуємо завдання в канонічному вигляді – додаємо дифрівняння для критерію:

$$\frac{d}{dt}x(t)=fin(x(t)\cdot u(t))\ ;\ \frac{d}{dt}J1(t)=x(t)\cdot(1-u(t)).$$

Вводимо позначення:

$$\frac{d}{dt}x(t)=fin(x(t)\cdot u(t))=fx\ ;\ \frac{d}{dt}J1(t)=x(t)\cdot(1-u(t))=fJ\cdot$$

Запишемо функцію Гамільтона $H(x,u)=\sum_{i=0}^{N}\psi_i f_i=\psi J\cdot fJ+\psi x\cdot fx$.

Підставимо праві частини дифрівнянь і отримаємо

$$H(x,u)=\psi J\cdot[x(t)\cdot(1-u(t))]+\psi x\cdot fin(x(t)\cdot u(t)).$$

Записуємо рівняння для визначення спряжених функцій.

$$\frac{d}{dt}\psi J(t)=-\frac{\partial}{\partial J}H(x,u)\ ;\ \frac{d}{dt}\psi x(t)=-\frac{\partial}{\partial x}H(x,u)\ .$$

Знаходимо відповідні окремі похідні від $H(x\ ,u)$

$$\frac{\partial}{\partial J}H(x,u)=0\ ;\ \frac{d}{dx}H(x.u)=\psi J\cdot(l-u)+\psi x(t)\cdot u\cdot\frac{d}{dx}fin(u\cdot x).$$

На базі числового розв’язання дифрівнянь знаходиться функція Гамільтона.

3. Розширення задачі оптимального розвитку – кредитні стратегії. З невідомих причин Беллман не розглядав варіаційну задачу розподілу з урахуванням використання зовнішніх ресурсів – кредитів. Використання зовнішніх ресурсів у процесах розвитку є нормою, тому введемо ще одну змінну управління – темп кредитів. Тепер ми повинні визначати, окрім *оптимальної стратегії розвитку* (пропорції розподілу ресурсів між накопиченням і розвитком), ще *оптимальну кредитну стратегію* – обсяг кредитів на кожному кроці процесу. Не вводимо поки що одну змінну – темп повернення кредитів. Розглянемо звичайний для банківської сфери спосіб повернення кредитів: рівними частками з моменту, коли кредит взятий, і до кінця періоду з урахуванням відсотків. Маємо дві змінних управління: темп кредиту *xkr(t)* і частка поточних засобів *u1(t)*, направлених у інвестиції.

Потрібно знайти дві функції часу *u1op(t), xkrop(t)*, що дають максимум накопиченого доходу за плановий період *Tp*.

Аналіз властивостей функції Гамільтона дозволяє знайти задовільні наближення цієї функції *в просторі стратегій,* адже нас цікавлять тільки положення максимумів цієї функції. Пригадаємо "фізичний сенс" функції Гамільтона – це "проекція" поточних управлінь на кінцевий результат. Порівняємо три вирази для функції Гамільтона: точне і наближене, без кредитів і з кредитами. Введемо для скорочення виразів змінну "сумарні поточні ресурси" $xs(t) = x(t) + xkr(t)$ і запишемо поряд для порівняння вирази для функції Гамільтона наближений з урахуванням кредитів і точний вираз.

$$H(x,u) = x \cdot (l-u) + fin(x \cdot u) \cdot (T-t);$$

$$H(xs,u) = xs \cdot (l-u) + fin(xs \cdot u)(T-t) - xkr \cdot [1 + prc \cdot (T-t)];$$

$$Ho(x,u) = x \cdot (1-u) + fin(x \cdot u) \cdot \psi n\left(x, u, \frac{\partial}{\partial y} fin(y)\right);$$

де *T* – час закінчення процесу, *t* – поточний час, *(T - t)* – час залишається до кінця процесу, *x(t)* – темп виробництва, *xkr(t)* – темп кредитів, $\psi n\left(x, u, \frac{d}{dy} fin(y)\right)$ – функція користувача, визначена через числове рішення дифрівняння для спряженої функції.

Аналіз оптимальних процесів розвитку. Побудова функції впливу ставки кредитів. Точно так, як і у фізиці, могутній прискорювач елементарних частинок дозволяє знаходити нові результати, так і адекватна реальності та обчислювально ефективна програма моделювання процесів розвитку стає генератором нових результатів. Розглянемо приклад дослідження залежності кредитних стратегій виробника від ставки кредитів і ефективності інвестицій. Для отримання названих функцій впливу виконувалося 20 – 100 прогонів програми моделювання. На рис. 1 представлений дворівневий інтерфейс для аналізу функцій впливу. Особливість інтерфейсу в тому, що користувач може вибрати точку на функції впливу і побачити "в деталях" процес розвитку виробничої системи, який відображається в цю точку.

Функція впливу ставки кредитів є "природною" функцією попиту на кредити, зумовленою оптимальною кредитною стратегією. Ця стратегія обчислюється на базі математичної моделі і дійсних механізмів економіки. Така модель стає *генератором нових знань* про властивості систем цього класу. На рис. 2 представлений приклад такої ситуації: в оптимальному процесі розвитку при зменшенні ставки кредиту, починаючи з деякого значення ставки кредитів (у нашому випадку – 20%), накопичений дохід виробництва зростає, а накопичений дохід банку – падає. Однак *сумарний дохід системи росте*, тому що інтереси сторін неантагоністичні: маємо гру з ненульовою сумою. Модель оптимального розвитку дозволяє розрахувати розмір компенсації банку втрат від зниження ставки кредитів, при якому виграють обидві сторони. Таким чином (рис. 2) модель підказує шлях до одночасного підвищення виграшу виробництва й банку за рахунок використання іншого механізму взаємодії: *доходи банку пропорційні не тільки розміру кредитів, але й розміру доходів виробництва*. Віддаленим аналогом пропонованого механізму є механізм акціонування підприємства: дохід по акціях залежить не тільки від кількості акцій, але й від прибутку підприємства.

Оптимізація стратегій повернення кредитів. Наведені на рис. 1, 2 приклади результатів справедливі для стандартної схеми повернення кредитів (повернення тіла кредитів і відсотків рівними частками до кінця планового періоду). Зробимо наступний крок від стандартної схеми повернення кредитів рівними частинами. Була поставлена й вирішена *розширена задача оптимального розвитку*: до змінних управління "частка сумарного ресурсу на розвиток", "темп кредитів" додана змінна "темп повернення кредитів".

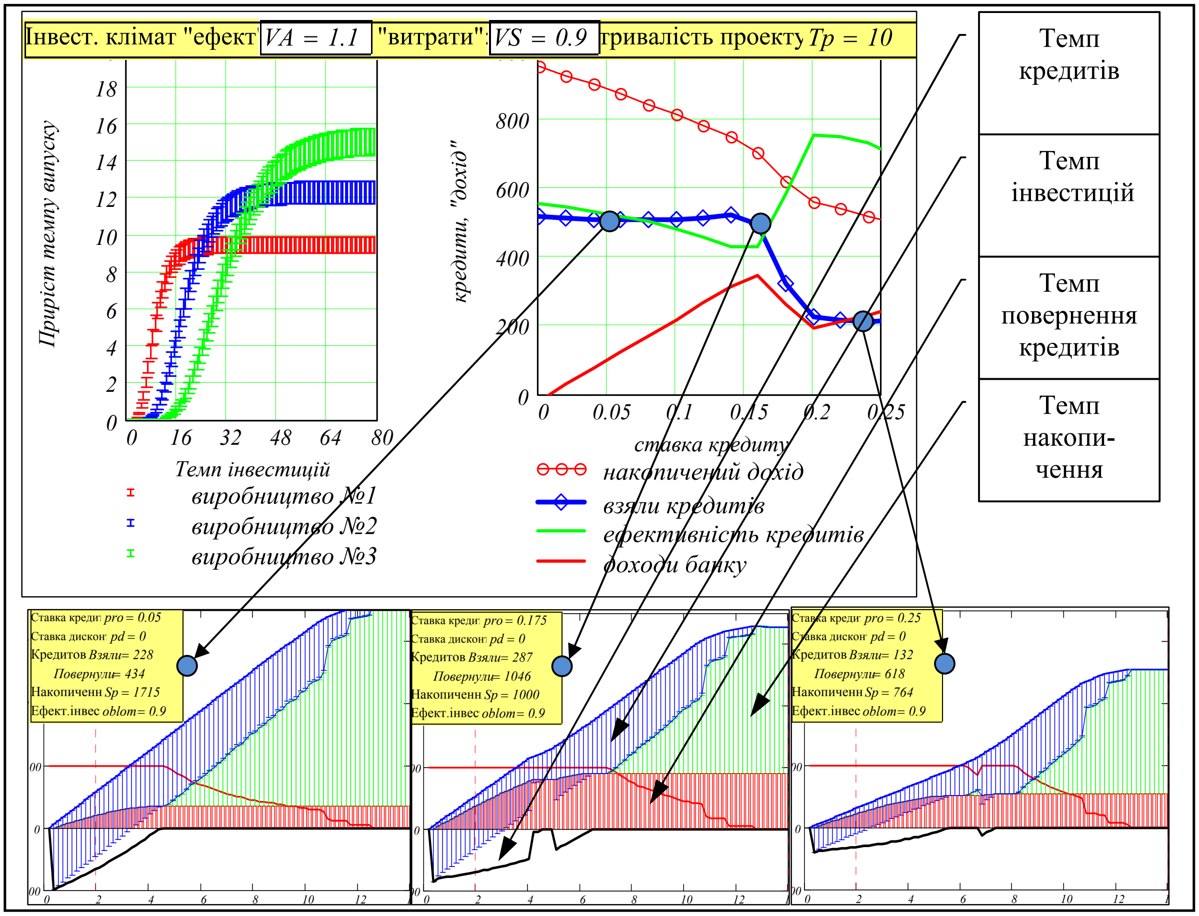

Рис. 1. Аналіз функції впливу ставки кредитів на показники проекту

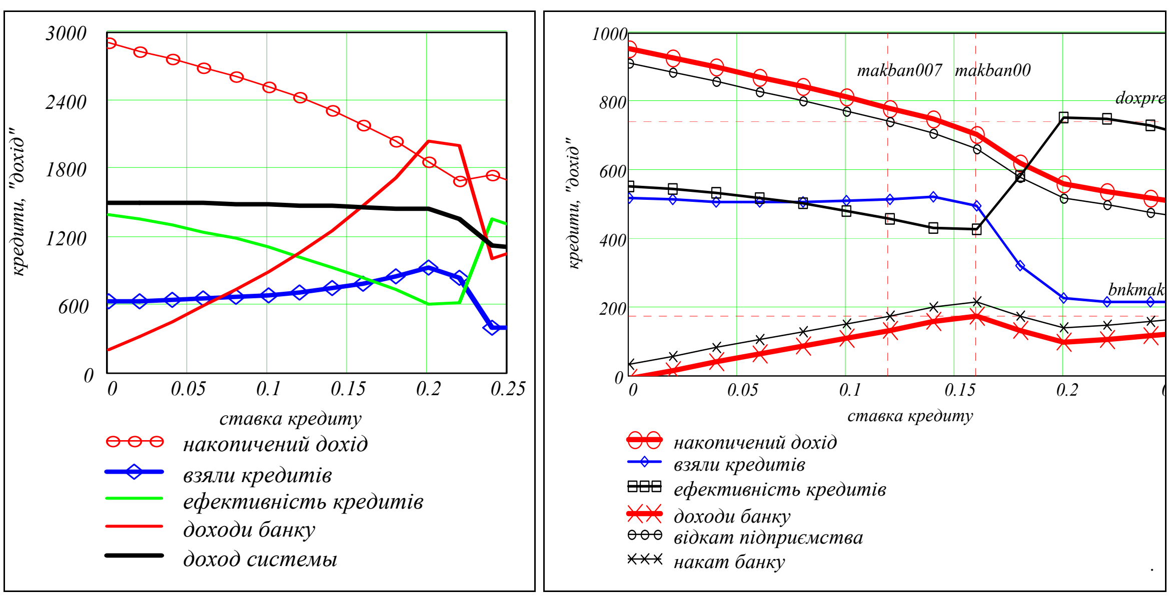

Рис. 2. Аналіз розподілу доходу в системі "виробник – банк"

На рис. 3 подані результати моделювання процесів оптимального розвитку з двома стратегіями повернення кредитів: рівними частками й оптимальною стратегією повернення кредитів. Форма інтерфейсу зручна для аналітика й спеціаліста з управління.

На рис. 4 подана альтернативна форма представлення інформації – балансна, яка зручна для фінансиста. Ці рішення можуть бути замінені наближеними, зручними для практичної реалізації. Словесна формула оптимального управління процесом розвитку: – спочатку всі ресурси (власні і позичені) направляємо в інвестиції, оптимальний обсяг інвестицій приблизно постійний, якщо у виробничій системі відсутні ефекти освоєння в розширенні виробництва; – кредитів береться стільки, щоб доповнити власні ресурси до оптимального рівня інвестицій, кредитування припиняється, коли власних ресурсів досить для розвитку; – після припинення кредитування все, що залишається від інвестицій, іде на повернення кредитів; – тільки після повернення боргів починається процес накопичення.

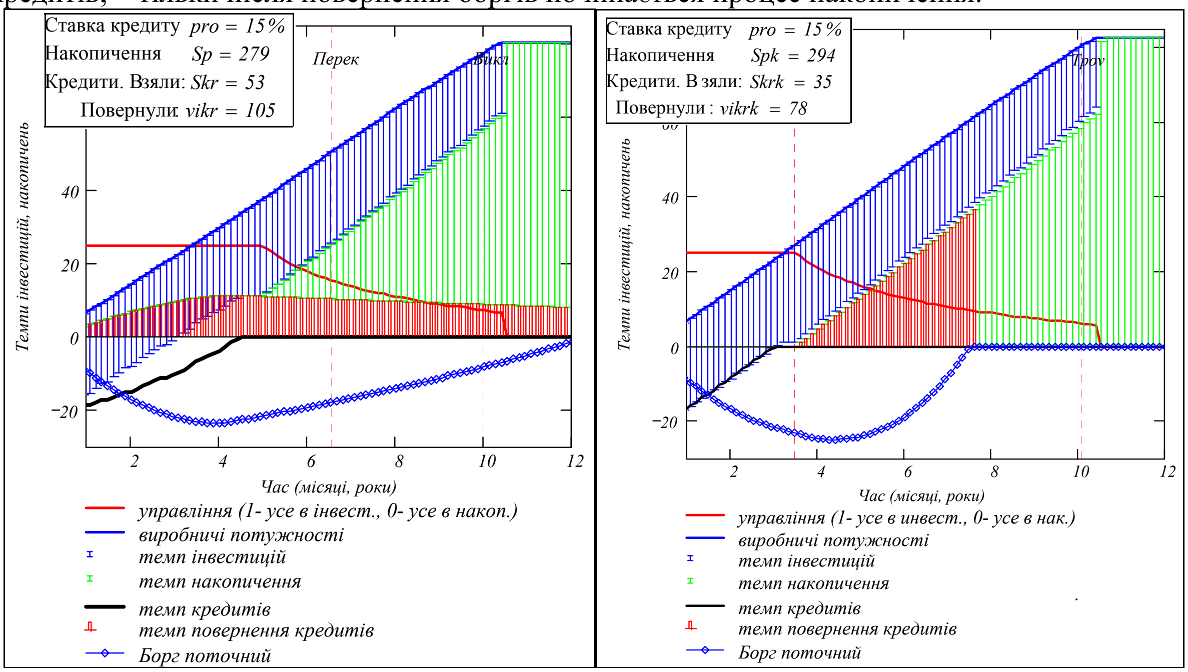

Рис. 3. Порівняння двох стратегій повернення кредитів

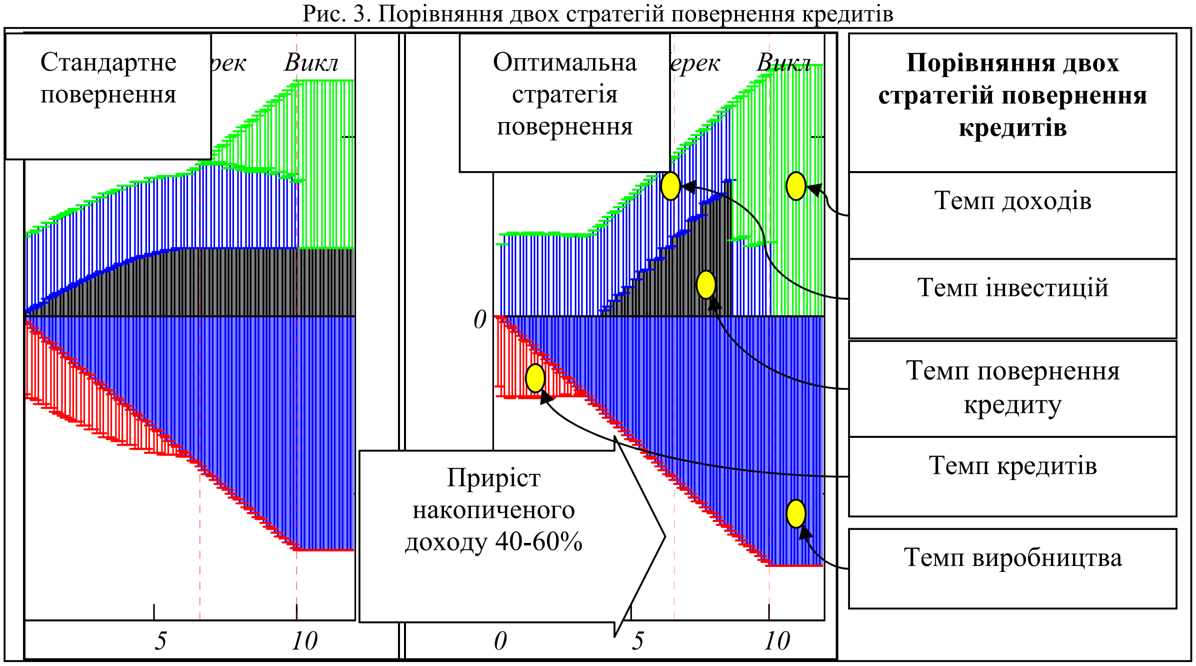

Рис.4. Аналіз стратегій повернення кредитів. Балансна форма

Результати розробки. Знайдене точне й наближене *розв'язання варіаційної задачі розвитку* з урахуванням використання зовнішніх ресурсів, розроблена *модель процесу розвитку системи "N виробників на ринку M продуктів"*, розроблені *модулі побудови функцій впливу та частотних розподілів ризиків*. Приклади результатів моделювання на рис. 1 – 4 подані також як індикатор того, що задекларовані моделі дійсно зроблені, а програмні модулі дійсно працюють. У статті розглянуто переважно кінцеві результати досить об'ємного процесу конструювання системи математичних моделей оптимального розвитку. Повне теоретичне обґрунтування підходу до розв'язання варіаційної задачі виконане в середовищі математичного пакету з використанням апарату символьних обчислень і має обсяг 35 сторінок. Ця розробка є модулем системи моделей класу "*N* виробників, *M* продуктів, *K* споживачів".

Висновки. В основі отриманих результатів – ефективне розв'язання варіаційної задачі розвитку з використанням методу оптимального агрегування та методу розв'язання варіаційної задачі розвитку з урахуванням використання зовнішніх ресурсів. Розроблена система робочих програм і інтерфейсів – "віртуальна реальність". Отримані *нові результати* (властивості оптимальних процесів розвитку) цікаві для теорії і корисні для практики: – розривність стратегій розвитку; – розривність кредитних стратегій; – зменшення попиту на кредити при низьких ставках кредитів; – знайдені умови несуперечності інтересів банку й виробника; – запропоновано вирішення за погодженням інтересів сторін за рахунок справедливого розподілу доходів.

Методологічні результати роботи: – показано, що кредити не тільки підвищують накопичений дохід проекту, але й спрощують управління процесом розвитку, а сам процес роблять менш ризиковим; – наведено приклад раціональної технології конструювання нових моделей для нових задач, орієнтованої на технології й можливості Інтернету, зокрема на "програмне забезпечення як сервіс".

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Беллман Р. Некоторые вопросы математической теории управления / Р. Беллман, И. Гликсберг, О. Гросс. – М.: Издат. иностр. литер., 1962. – 233 с.

2. Мак-Дональд М. Стратегическое планирование маркетинга. – Москва – Харьков: Питер, 2001. – 267 с. –

3. Боровская Т. Н. Детская экономика. Моделирование и оптимизация производственных систем / Т. Н. Боровская, В.А. Северилов, И.С. Колесник. // Компьютеры + Программы. – 2002. – № 2. – С. 43 – 47.

4. Боровська Т. М. Основи теорії управління та дослідження операцій. Навчальний посібник / Т. М. Боровська, І.С. Колесник, В.А. Северілов. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – 242 с.

5. Боровська Т. М. Спеціальні розділи вищої математики. Навчальний посібник / Т. М. Боровська, І.С. Колесник, В.А. Северілов. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – 182 с.

Колесник Ірина Сергіївна – старший викладач кафедри обчислювальних систем;

Іванов Роман Леонідович – студент групи 5АС – 04;

Северілов Павло Вікторович – здобувач кафедри комп'ютерних систем управління.

Вінницький національний технічний університет.